미적분 2025학년도 6월 모의고사 변형(2024년 시행)

고3 24년 6월

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

| 지수법칙(2) : 지수가 유리수일 때 | 정답률 90%

01 [2024년 6월 고3 1번 변형]

$\left(\frac{16}{\sqrt[3]{32}}\right)^{\frac{3}{7}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

| 미분계수를 이용하여 극한값 구하기 | 정답률 84%

02 [2024년 6월 고3 2번 변형]

함수 $f(x)=x^2+2x+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

| Σ의 성질 | 정답률 80%

03 [2024년 6월 고3 3번 변형]

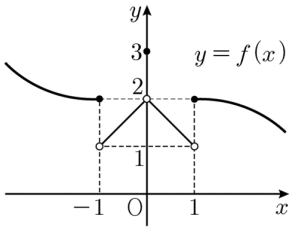
수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{6}(a_k+2)=15$이고 $a_7=6$일 때, $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

| 함수의 우극한과 좌극한(2) : 그래프가 주어진 경우 | 정답률 87%

04 [2024년 6월 고3 4번 변형]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to -1-}f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

| 곱의 미분법(1) : y=f(x)g(x) 꼴 | 정답률 90%

05 [2024년 6월 고3 5번 변형]

함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

| 각 π/2±θ의 사인함수와 코사인함수 | 정답률 76%

06 [2024년 6월 고3 6번 변형]

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{12}{13}$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{13}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{5}{13}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

| 방정식 f(x)=k의 실근의 개수 | 정답률 82%

07

[2024년 6월 고3 7번 변형]

x에 대한 방정식 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은?

① -27 ② -29 ③ -31
④ -33 ⑤ -35

| 등비수열의 일반항 구하기(3) : a_i+a_j=k 형태(a_i와 a_j의 사칙연산 형태)로 주어진 경우 | 정답률 79%

08

[2024년 6월 고3 8번 변형]

$a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=5$, $3a_8-11a_7=20$일 때, a_9+a_{10}의 값은?

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{10}{81}$ ③ $-\frac{11}{81}$
④ $\frac{10}{81}$ ⑤ $\frac{11}{81}$

| 미분가능성과 연속성(3) : 구간에 따라 다르게 정의된 함수 | 정답률 75%

09

[2024년 6월 고3 9번 변형]

함수 $f(x)=\begin{cases}x-2 & (x<0)\\ -2x^2+1 & (x\geq 0)\end{cases}$에 대하여 함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

| 삼각형의 넓이(4) : 한 변의 길이와 양 끝 각의 크기가 주어진 경우 | 정답률 53%

10

[2024년 6월 고3 10번 변형]

다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 16π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $4\sin A=3\sin B$
(나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{155}{64}\sqrt{53}$ ② $\frac{5}{2}\sqrt{53}$ ③ $\frac{165}{64}\sqrt{53}$
④ $\frac{5}{2}\sqrt{55}$ ⑤ $\frac{165}{64}\sqrt{55}$

| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 | 정답률 70%

11

[2024년 6월 고3 11번 변형]

최고차항의 계수가 2이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-3}{x-a}=2$를 만족시킨다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 1일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

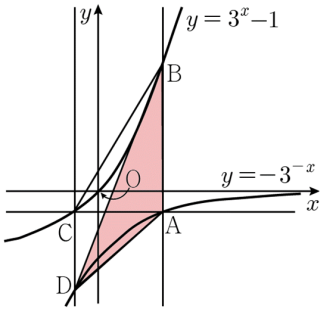
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

| 지수함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 49%

12

[2024년 6월 고3 12번 변형]

다음 그림과 같이 곡선 $y=-3^{-x}$ 위의 제4사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x}-1$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x}-1$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 $y=-3^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는?



① $\frac{7}{3}-\frac{7}{6}\log_3 2$ ② $\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\log_3 2$

③ $3-\frac{3}{2}\log_3 2$ ④ $\frac{10}{3}-\frac{5}{3}\log_3 2$

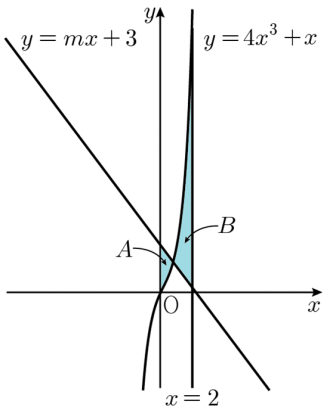
⑤ $\frac{11}{3}-\frac{11}{6}\log_3 2$

| 곡선과 직선 사이의 넓이 | 정답률 55%

13

[2024년 6월 고3 13번 변형]

곡선 $y=4x^3+x$와 직선 $y=mx+3$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=4x^3+x$와 두 직선 $y=mx+3$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=16$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$)



① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{11}{6}$

④ -2 ⑤ $-\frac{13}{6}$

| 로그의 진수에 미지수를 포함하는 부등식의 응용 | 정답률 51%

14

[2024년 6월 고3 14번 변형]

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

> $\log_3\sqrt{-n^2+8n+48}-\log_9(48-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 9이다.

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

| 정적분의 계산(3) : 구간에 따라 다르게 정의된 함수 | 정답률 31%

15 [2024년 6월 고3 15번 변형]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 k $(k \geq 0)$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} 3x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.

(나) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x g(t)\{|t(t-2)|+t(t-2)\}dt \geq 0$$이고

$$\int_3^x g(t)\{|(t-2)(t+1)| -(t-2)(t+1)\}dt \geq 0$$

이다.

$g(k+4)$의 최솟값은?

① 35 ② 40 ③ 45
④ 50 ⑤ 55

| 로그의 진수에 미지수를 포함하는 방정식 : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | 정답률 80%

16 [2024년 6월 고3 16번 변형]

방정식 $\log_3(x+2)-3=\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : f'(x)로부터 f(x)구하기 | 정답률 90%

17 [2024년 6월 고3 17번 변형]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2+4x$이고 $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

| 자연수의 거듭제곱의 합(1) : 기본 공식을 이용하는 경우 | 정답률 80%

18 [2024년 6월 고3 18번 변형]

$\sum_{k=1}^{8}(ak^2-6k)=600$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

| 위치와 위치의 변화량 | 정답률 64%

19 [2024년 6월 고3 19번 변형]

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} t^2-7t+10 & (0 \leq t \leq 4) \\ k(t-4)-2 & (t>4) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 $\frac{14}{3}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

| y=asin(bx+c)+d의 성질 | 정답률 51%

20 [2024년 6월 고3 20번 변형]

4 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $y=a+b$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A \cup B \cup C)=4$가 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : f'(x)로부터 f(x)구하기 | 정답률 32%

21 [2024년 6월 고3 21번 변형]

최고차항의 계수가 3인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a) \leq 0$인 실수 a의 최댓값은 3이다.

(나) 집합 $\{x|f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 81이다.

$f(0)=0$, $f'(2)=0$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 32%

22

[2024년 6월 고3 22번 변형]

수열 $\{a_n\}$은 $a_2 = -a_1$이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n - \sqrt{n} \cdot a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고, } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 2 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{12} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소이다.)

| 등비수열의 극한(1) | 정답률 89%

23

[2024년 6월 고3 미적분 23번 변형]

$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$의 값은?

① 9 ② 8 ③ 7
④ 6 ⑤ 5

| 음함수의 미분법의 응용 | 정답률 78%

24

[2024년 6월 고3 미적분 24번 변형]

곡선 $3x\sin 4y - 2x = -2$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

| 급수와 수열의 극한값 사이의 관계(2) | 정답률 80%

25

[2024년 6월 고3 미적분 25번 변형]

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{7n^2+5}{3n^2-2n}\right) = 5$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^2 - 3a_n\right)$의 값은?

① $-\frac{14}{9}$ ② $-\frac{10}{9}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

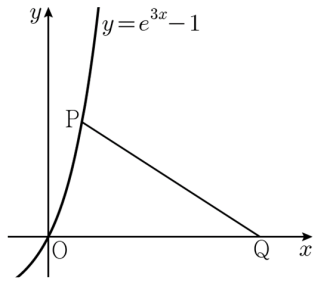
| 지수, 로그함수의 활용(1) : 그래프, 좌표 | 정답률 71%

26

[2024년 5월 고3 미적분 25번 변형]

곡선 $y = e^{3x} - 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2t,\ e^{6t} - 1)$ $(t > 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} - \overline{\mathrm{OQ}} = 0$를 만족시키는 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값은?

(단, O는 원점이다.)



① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

| 함수의 최대,최소의 활용 | 정답률 50%

27 [2024년 6월 고3 미적분 27번 변형]

상수 a $(a>1)$과 실수 t $(t>0)$에 대하여 곡선 $y=2\cdot a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ 2a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=\dfrac{1}{6}$에서 최대일 때, a의 값은?

① $\sqrt{e}$ ② e ③ e^2
④ e^3 ⑤ e^6

| 역함수의 미분법의 응용 | 정답률 50%

28 [2024년 6월 고3 미적분 28번 변형]

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases}(x-a-1)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+e^a & (x<a)\end{cases}$일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=4$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+1))}{g'(f(a+7))}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $12e^6$ ② $16e^6$ ③ $20e^6$
④ $12e^7$ ⑤ $16e^7$

| 지수, 로그함수의 미분가능성 | 정답률 31%

29 [2024년 6월 고3 미적분 29번 변형]

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+8\ln(x^2+4)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq b)\\ -f(x-c) & (x<b)\end{cases}$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $3(p-q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

| 삼각함수 덧셈정리 활용(1) : 방정식,함수 | 정답률 31%

30 [2024년 6월 고3 미적분 30번 변형]

함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{4}$의 그래프와 함수 $y=\tan 2x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n{}^3\tan^2(2a_{n+1}-2a_n)$의 값을 구하시오.

미적분 2025학년도 6월 모의고사 변형(2024년 시행)

고3 24년 6월

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

01 정답 ⑤

해설 $\left(\frac{16}{\sqrt[3]{32}}\right)^{\frac{3}{7}}=\left(\frac{2^4}{2^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{3}{7}}$

$=\left(2^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{7}}=2$

02 정답 ③

해설 $f(x)=x^2+2x+3$에서

$f'(x)=2x+2$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$

$=2\cdot 3+2$

$=8$

03 정답 ④

해설 $\sum_{k=1}^{6}(a_k+2)=\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{6}2$

$=\sum_{k=1}^{6}a_k+2\cdot 6$

$=15$

에서

$\sum_{k=1}^{6}a_k=15-12=3$

$\therefore \sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{6}a_k+a_7$

$=3+6=9$

04 정답 ④

해설 $\lim_{x\to 0-}f(x)=2$, $\lim_{x\to -1-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to -1-}f(x)=2+2=4$

05 정답 ④

해설 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x+2)$에서

$f'(x)=2x(x^2+x+2)+(x^2+1)(2x+1)$이므로

$f'(1)=2\cdot 4+2\cdot 3=14$

06 정답 ②

해설 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{12}{13}$에서

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=-\cos\theta$

따라서 $-\cos\theta=-\frac{12}{13}$, 즉 $\cos\theta=\frac{12}{13}$이고

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}$

$=-\sqrt{\frac{25}{169}}$

$=-\frac{5}{13}$

07 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$, $x=2$

$f(-1)=k+\frac{7}{2}$, $f(2)=k-10$

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-1$에서 극댓값 $k+\frac{7}{2}$을 갖고, $x=2$에서 극솟값 $k-10$을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$k+\frac{7}{2}=0$ 또는 $k-10=0$

즉, $k=-\frac{7}{2}$ 또는 $k=10$이므로 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은

$-\frac{7}{2}\cdot 10=-35$

08 정답 ②

해설 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $a_6=5$이므로

$a_8=a_6\cdot r^2=5r^2$, $a_7=a_6\cdot r=5r$

이때 $3a_8-11a_7=20$이므로

$3\cdot 5r^2-11\cdot 5r=20$

$3r^2-11r-4=0$, $(3r+1)(r-4)=0$

이때 $a_1a_2<0$에서 $r<0$이므로

$r=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a_9+a_{10}=a_6\cdot r^3+a_6\cdot r^4$

$=5\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{81}\right)$

$=-\frac{10}{81}$

09 정답 ④

해설 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로

함수 $(f(x)+a)^2$이 $x=0$에서 연속이 되도록 a의 값을 정한다.

$\lim_{x\to 0-}(f(x)+a)^2=(f(0)+a)^2$

$\lim_{x\to 0-}(x-2+a)^2=(1+a)^2$

$(-2+a)^2=(1+a)^2$

$a^2-4a+4=a^2+2a+1$, $6a=3$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

10 정답 ⑤

해설 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고,

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 16π이므로

$\pi R^2=16\pi$, 즉 $R=4$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

조건 (가)에서 $4\sin A=3\sin B$이므로

$4\cdot\frac{a}{2R}=3\cdot\frac{b}{2R}$

$b=\frac{4}{3}a$ … ㉠

조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$이므로

$b=c$ … ㉡

㉠, ㉡에서 양수 k에 대하여 $a=3k$라 하면

$b=c=4k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(4k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\cdot 4k\cdot 4k}=\frac{23}{32}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{23}{32}\right)^2}=\frac{3}{32}\sqrt{55}$

$\frac{a}{\sin A}=2R=2\cdot 4=8$에서

$a=8\sin A=8\cdot\frac{3}{32}\sqrt{55}=\frac{3}{4}\sqrt{55}$,

$b=c=\frac{4}{3}a=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{55}=\sqrt{55}$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{55}\cdot\sqrt{55}\cdot\frac{3}{32}\sqrt{55}$

$=\frac{165}{64}\sqrt{55}$

11 정답 ④

해설 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이고
$f(0)=0$이므로 $f(x)=2x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)로 놓을 수 있다.
이때 $f'(x)=6x^2+2px+q$이고 삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-3}{x-a}=2$에서 $f(a)=3$이고 $f'(a)=2$이다.
한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이므로
$y=2(x-a)+3$, 즉 $y=2x-2a+3$이다.
이 접선의 y절편이 1이므로
$-2a+3=1$
$\therefore\ a=1$
따라서 $f(1)=3$, $f'(1)=2$이므로
$f(1)=2+p+q=3$에서
$p+q=1$ … ㉠
$f'(1)=6+2p+q=2$에서
$2p+q=-4$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$p=-5$, $q=6$
따라서 $f(x)=2x^3-5x^2+6x$이므로
$f(2)=2\cdot 2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2=8$

12 정답 ①

해설 두 점 A, B의 x좌표를 a라 하면
$\mathrm{A}(a,\ -3^{-a})$, $\mathrm{B}(a,\ 3^a-1)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=3^a-1-(-3^{-a})=3^a+3^{-a}-1$
또, 두 점 C, D의 x좌표를 c라 하면
$\mathrm{C}(c,\ 3^c-1)$, $\mathrm{D}(c,\ -3^{-c})$이므로
$\overline{\mathrm{CD}}=3^c-1-(-3^{-c})=3^c+3^{-c}-1$
이때 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로
$3^c-1=-3^{-a}$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=-3^{-a}+1+\frac{1}{-3^{-a}+1}-1$$

$$=-3^{-a}+\frac{1}{-3^{-a}+1}$$

주어진 조건에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$$3^a+3^{-a}-1=-2\cdot 3^{-a}+\frac{2\cdot 3^a}{3^a-1}$$

이때 $3^a=t$라 하면

$$t+\frac{1}{t}-1=-\frac{2}{t}+\frac{2t}{t-1}$$

양변에 $t(t-1)$을 곱하여 정리하면
$t^2(t-1)+t-1-t(t-1)=-2(t-1)+2t^2$
$t^3-4t^2+4t-3=0,\ (t-3)(t^2-t+1)=0$
이때 t는 실수이므로
$t=3$
즉, $3^a=3$이므로
$a=1$
이때 $3^c=1-3^{-a}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$c=\log_3\frac{2}{3}=\log_3 2-1$$

따라서 조건을 만족시키는 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(a-c)\cdot(3^a+3^{-a}-1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1-\log_3 2+1)\cdot\left(3+\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{7}{6}(2-\log_3 2)$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{7}{6}\log_3 2$$

13 정답 ④

해설 $f(x)=4x^3+x$, $g(x)=mx+3$라 하고
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$$A=\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$B=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$\therefore B-A$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^{2}\{(4x^3+x)-(mx+3)\}dx$$

$$=\left[x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{m}{2}x^2-3x\right]_0^2$$

$$=16+2-2m-6$$

$$=-2m+12=16$$

$\therefore m=-2$

14 정답 ②

해설 $\log_3\sqrt{-n^2+8n+48}$에서
진수 조건에 의하여
$\sqrt{-n^2+8n+48}>0$, 즉 $-n^2+8n+48>0$에서
$n^2-8n-48<0$, $(n+4)(n-12)<0$
$\therefore -4<n<12$
이때 n이 자연수이므로
$1\le n<12$ … ㉠
또, $\log_9(48-kn)$에서 진수 조건에 의하여
$48-kn>0$, 즉 $n<\frac{48}{k}$ … ㉡
한편, $\log_3\sqrt{-n^2+8n+48}-\log_9(48-kn)$의 값이 양수이므로
$\log_3\sqrt{-n^2+8n+48}-\log_9(48-kn)>0$
$\log_9(-n^2+8n+48)-\log_9(48-kn)>0$
$\log_9(-n^2+8n+48)>\log_9(48-kn)$
이때 밑 9가 1보다 크므로
$-n^2+8n+48>48-kn$
$n(n-8-k)<0$
k가 자연수이므로
$0<n<8+k$ … ㉢
주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 9이므로
㉠, ㉢에서 $8+k>9$이어야 한다.
즉, $k>1$이어야 하므로
(i) $k=2$일 때,
㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<10$
따라서 자연수 n의 개수가 9이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(ii) $k=3$일 때,
㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<11$
따라서 자연수 n의 개수가 10이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(iii) $k=4$일 때,
㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<12$
따라서 자연수 n의 개수가 11이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(iv) $k=5$일 때,
㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<\frac{48}{5}$
따라서 자연수 n의 개수가 9이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(v) $k\ge 6$일 때,
$\frac{48}{k}<9$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(i)~(v)에서
$k=2$ 또는 $k=5$
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은
$2+5=7$

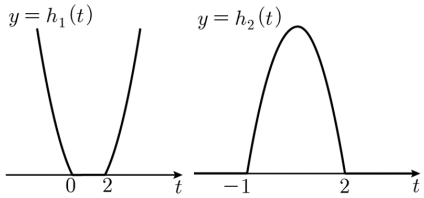
15 정답 ②

해설 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$g(x)=\begin{cases}3x-k & (x\le k)\\ f(x) & (x>k)\end{cases}$이므로
$g'(x)=\begin{cases}3 & (x<k)\\ f'(x) & (x>k)\end{cases}$
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
또한, $h_1(t)=|t(t-2)|+t(t-2)$,
$h_2(t)=|(t-2)(t+1)|-(t-2)(t+1)$이라 하면

$$h_1(t)=\begin{cases}2t(t-2) & (t\le 0 \text{ 또는 } t\ge 2)\\ 0 & (0<t<2)\end{cases}$$

$$h_2(t)=\begin{cases}0 & (t\le -1 \text{ 또는 } t\ge 2)\\ -2(t-2)(t+1) & (-1<t<2)\end{cases}$$

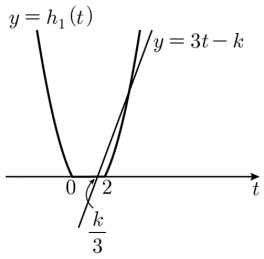
따라서 두 함수 $y=h_1(t)$, $y=h_2(t)$의 그래프는 각각 다음과 같다.



한편, p가 상수일 때, 모든 실수 x에 대하여
$\int_p^x h(t)dt\ge 0$이기 위해서는 구간 $[p, x]$에서는
$h(t)\ge 0$이고 구간 $[x, p]$에서는 $h(t)\le 0$이어야 한다.
(i) 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$\int_0^x g(t)h_1(t)dt \geq 0$이므로 그림과 같이

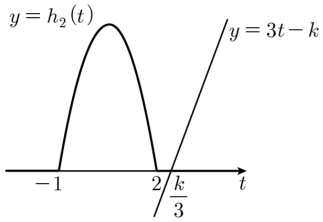
$0 \leq \frac{k}{3} \leq 2$, 즉 $0 \leq k \leq 6$이어야 한다.



(ii) 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$\int_3^x g(t)h_2(t)dt \geq 0$이므로 그림과 같이

$\frac{k}{3} \geq 2$, 즉 $k \geq 6$이어야 한다.



(i), (ii)에 의하여 $k=6$

이때 조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k=6$에서도 미분가능하고 연속이다.

$g'(6)=f'(6)=3$에서

$108+12a+b=3$, $b=-12a-105$

$g(6)=f(6)=12$에서 $216+36a+6b+c=12$

$c=-36a-6b-204$

$=-36a+6(12a+105)-204=36a+426$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2$

$-(12a+105)x+36a+426$ … ㉠

한편, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 증가하므로 $g'(x) \geq 0$이다.

따라서 $x>6$일 때, $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

즉, $f'(x)=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+b-\frac{a^2}{3}$에서

(a) $-\frac{a}{3}<6$, 즉 $a>-18$일 때

$f'(6)=108+12a+b=108+12a-12a-105$

$=3>0$

이므로 조건을 만족시킨다.

$\therefore a>-18$ … ㉡

(b) $-\frac{a}{3} \geq 6$, 즉 $a \leq -18$일 때

$b-\frac{a^2}{3} \geq 0$, 즉 $a^2-3b \leq 0$이어야 하므로

$a^2-3b=a^2-3(-12a-105) \leq 0$

$a^2+36a+315 \leq 0$, $(a+15)(a+21) \leq 0$

$-21 \leq a \leq -15$이므로

$-21 \leq a \leq -18$ … ㉢

㉡, ㉢에서

$a \geq -21$ … ㉣

㉠에 $x=10$을 대입하면 ㉣에 의하여

$g(k+4)=g(10)=f(10)$

$=1000+100a-10(12a+105)+36a+426$

$=16a+376 \geq 40$

따라서 $g(10)$의 최솟값은 40이다.

16 정답 7

해설 로그의 진수의 조건에 의하여

$x+2>0$, $x-4>0$

즉, $x>4$ … ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)=-\log_3(x-4)$이므로

$\log_3(x+2)-3=\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$에서

$\log_3(x+2)+\log_3(x-4)=3$

$\log_3(x+2)(x-4)=3$

$(x+2)(x-4)=3^3=27$

$x^2-2x-8=27$, $(x+5)(x-7)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=7$

이때 ㉠에 의하여

$x=7$

17 정답 33

해설 $f'(x)=9x^2+4x$이므로

$f(x)=\int(9x^2+4x)dx$

$=3x^3+2x^2+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로

$C=1$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+1$이므로

$f(2)=3\cdot 2^3+2\cdot 2^2+1=33$

18 정답 4

해설 $\sum_{k=1}^{8}(ak^2-6k)$

$=a\sum_{k=1}^{8}k^2-6\sum_{k=1}^{8}k$

$=a\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}-6\cdot\frac{8\cdot 9}{2}$

$=204a-216=600$

$204a=816$

$\therefore a=4$

19 정답 3

해설 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서 $v(t)=0$이다.

$0 \le t \le 4$일 때, $t^2-7t+10=0$에서

$(t-2)(t-5)=0$

이때 $0 \le t \le 4$이므로

$t=2$

$t>4$일 때, $k(t-4)-2=0$에서

$kt=4k+2$

$t=4+\frac{2}{k}$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각은 $t=4+\frac{2}{k}$이다.

이때 원점을 출발한 점 P의 시각 $t=4+\frac{2}{k}$에서의 위치가 $\frac{14}{3}$이므로

$$\int_0^{4+\frac{2}{k}} v(t)dt=\frac{14}{3}$$에서

$$\int_0^4 v(t)dt+\int_4^{4+\frac{2}{k}} v(t)dt$$

$$=\int_0^4 (t^2-7t+10)dt+\int_4^{4+\frac{2}{k}} (kt-4k-2)dt$$

이때 두 식을 각각 풀어서 정리하면

$$\int_0^4 (t^2-7t+10)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_0^4$$

$$=\frac{64}{3}-56+40=\frac{16}{3} \quad \cdots ㉠$$

$$\int_4^{4+\frac{2}{k}} (kt-4k-2)dt=\left[\frac{1}{2}kt^2-(4k+2)t\right]_4^{4+\frac{2}{k}}$$

$$=-\frac{2}{k} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int_0^4 v(t)dt+\int_4^{4+\frac{2}{k}} v(t)dt=\frac{16}{3}+\left(-\frac{2}{k}\right)=\frac{14}{3}$$

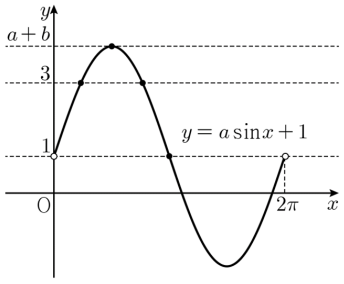
따라서 $\frac{2}{k}=\frac{2}{3}$이므로

$k=3$

20 정답 36

해설 직선 $y=a+b$는 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 항상 한 점에서 만나므로

(i) $b=1$인 경우

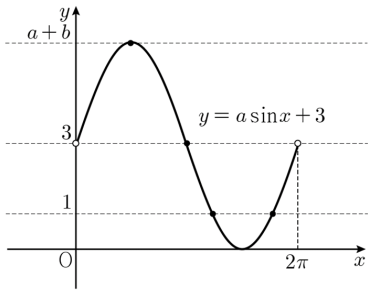


함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 직선 $y=1$은 한 점에서 만나므로 $n(A\cup B\cup C)=4$를 만족시키려면 $a+1>3$이므로 $a>2$에서 자연수 a, b의 순서쌍은 $(3, 1)$, $(4, 1)$이다.

(ii) $b=2$인 경우

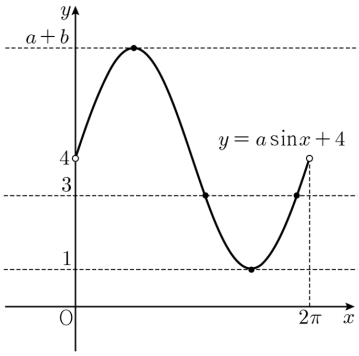
$n(A\cup B\cup C)=4$를 만족시키려면 $a+2>3$, $-a+2=1$이므로 $a>1$, $a=1$에서 자연수 a, b의 순서쌍은 존재하지 않는다.

(iii) $b=3$인 경우



함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 직선 $y=3$은 한 점에서 만나므로 $n(A\cup B\cup C)=4$를 만족시키려면 $-a+3<1$이어야 하므로 $a>2$에서 자연수 a, b의 순서쌍은 $(3, 3)$, $(4, 3)$이다.

(iv) $b=4$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=4$를 만족시키려면 $-a+4=1$이므로 $a=3$에서 자연수 a, b의 순서쌍은 $(3, 4)$이다.

따라서 ab의 최댓값과 최솟값은 각각 $M=12$, $m=3$이므로

$Mm=36$

21 정답 65

해설 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상인 실수 k의 값이 존재하므로
삼차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 각각 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면 부등식 $f'(x)\le 0$의 해가 $x\le\alpha$ 또는 $\beta\le x\le\gamma$이므로 조건 (가)에 의하여
$\gamma=3$
이때 $f'(2)=0$, $f'(3)=0$에서 $b\neq 2$, $b<3$인 상수 b에 대하여

$$f'(x)=12(x-2)(x-3)(x-b)$$
$$=12x^3-12(b+5)x^2+12(5b+6)x-72b$$

라 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=3x^4-4(b+5)x^3+6(5b+6)x^2-72bx+C$$

(C는 상수)

이때 $f(0)=0$에서 $C=0$이므로

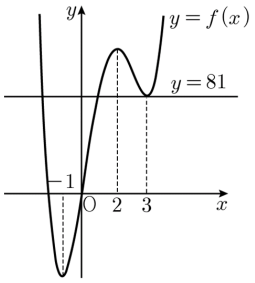
$$f(x)=3x^4-4(b+5)x^3+6(5b+6)x^2-72bx \quad \cdots ㉠$$

이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

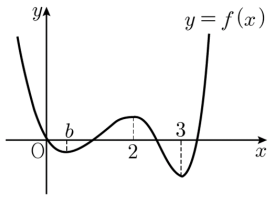
(i) $b<2$이고 $f(b)<f(3)$인 경우
조건 (나)에 의하여 $f(3)=81$이어야 하므로 ㉠에서

$$f(3)=243-108(b+5)+54(5b+6)-216b$$
$$=-54b+27=81$$
$$\therefore\ b=-1$$

$f(x)=3x^4-16x^3+6x^2+72x$에서
$f(-1)=3+16+6-72=-47<81$이므로 조건을 만족시킨다.
$\therefore\ f(1)=3-16+6+72=65$

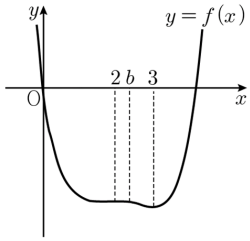


(ii) $b<2$이고 $f(3)<f(b)$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $f(b)\le 0$이다.
따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 0 또는 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $2<b<3$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $f(2)<0$이다.
따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서
$f(1)=65$

22 정답 31

해설 12 이하의 자연수 n에 대하여 $n\neq 4$, $n\neq 9$이면
$a_{n+1}=a_n+2$이므로
$a_n=a_{n+1}-2$
따라서 $a_{12}=1$에서
$a_{11}=a_{12}-2=-1$, $a_{10}=a_{11}-2=-3$
(i) $a_9>0$일 때

$$2a_9-\sqrt{9}\cdot a_{\sqrt{9}}=a_{10}=-3$$

따라서 $a_9=\frac{3}{2}a_3-\frac{3}{2}$에서

$$a_5=\frac{3}{2}a_3-\frac{19}{2}$$

(i-a) $a_4>0$일 때

$a_5=2a_4-\sqrt{4}\cdot a_{\sqrt{4}}$이므로

$$2a_4-2a_2=\frac{3}{2}a_3-\frac{19}{2}$$

즉, $a_4=a_2+\frac{3}{4}a_3-\frac{19}{4}$

따라서 $a_4=a_3+2$에서

$$a_3=a_2+\frac{3}{4}a_3-\frac{27}{4}$$
$$\therefore\ a_2-\frac{1}{4}a_3=\frac{27}{4}$$

이때 $a_3=a_2+2$이므로

$$a_2=\frac{29}{3},\ a_3=\frac{35}{3}$$
$$a_9=\frac{3}{2}\cdot\frac{35}{3}-\frac{3}{2}=16>0,$$
$$a_4=\frac{35}{3}+2=\frac{41}{3}>0$$
$$\therefore\ a_1=-a_2=-\frac{29}{3}$$

(i-b) $a_4\le 0$일 때

$$a_4+2=a_5=\frac{3}{2}a_3-\frac{19}{2}$$

따라서 $a_4=\frac{3}{2}a_3-\frac{23}{2}$에서

$a_3+2=\frac{3}{2}a_3-\frac{23}{2}$

$\therefore\ a_3=27$

따라서 $a_4=27+2=29$이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_9\le 0$일 때

$a_9=a_{10}-2=-5$에서 $a_5=-13$

(ii−a) $a_4>0$일 때

$a_5=2a_4-\sqrt{4}\cdot a_{\sqrt{4}}=2a_4-2a_2$

즉, $a_4=\frac{1}{2}a_5+a_2$이므로

$a_4=a_2-\frac{13}{2}$

따라서 $a_3=a_2-\frac{17}{2}$이고

$a_3=a_2+2$이므로

$a_2+2=a_2-\frac{17}{2}$에서 모순이다.

(ii−b) $a_4\le 0$일 때

$a_5=a_4+2=-13$

따라서 $a_4=-15$에서

$a_3=-17,\ a_2=-19$

$\therefore\ a_1=-a_2=19$

(i), (ii)에서 모든 a_1의 합은

$-\frac{29}{3}+19=\frac{28}{3}$

따라서 $p=3,\ q=28$이므로

$p+q=31$

23 정답 ①

해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}-\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{1}{9}-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{25}\cdot 0}{\frac{1}{9}-0}=9$$

24 정답 ③

해설

$3x\sin 4y-2x=-2$에서

y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3\sin 4y+3x\cos 4y\cdot 4\cdot\frac{dy}{dx}-2=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2-3\sin 4y}{12x\cos 4y}$ (단, $12x\cos 4y\neq 0$)

따라서 점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2-3\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{12\cdot 1\cdot\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2-3\sin 2\pi}{12\cos 2\pi}$$

$$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

25 정답 ①

해설

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}\right)=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{7}{3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}\right)+\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}$$

$$=0+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left({a_n}^2-3a_n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}a_n$

$=\left(\frac{7}{3}\right)^2-3\cdot\frac{7}{3}$

$=\frac{49}{9}-7=-\frac{14}{9}$

26 정답 ①

해설 두 점 P, Q의 좌표는 각각
$\mathrm{P}(2t,\ e^{6t}-1),\ \mathrm{Q}(f(t),\ 0)$
이때 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}=0$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$에서
$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로
$\{f(t)-2t\}^2+(e^{6t}-1)^2=\{f(t)\}^2$
$f(t)=t+\dfrac{(e^{6t}-1)^2}{4t}$

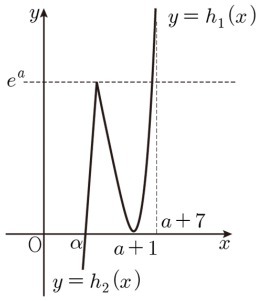
$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{e^{6t}-1}{t}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{e^{6t}-1}{6t}\cdot 6\right)^2\right\}$$
$$=1+\frac{1}{4}\cdot(1\cdot 6)^2=10$$

27 정답 ④

해설 $y=2\cdot a^x$에서 $y'=2\cdot a^x\ln a$
이때 점 $\mathrm{A}(t,\ 2a^t)$에서의 접선 l의 기울기는
$2a^t\ln a$이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는
$-\dfrac{1}{2a^t\ln a}$
따라서 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은
$y-2a^t=-\dfrac{1}{2a^t\ln a}(x-t)$
이 식에 $y=0$을 대입하면
$-2a^t=-\dfrac{1}{2a^t\ln a}(x-t)$
$\therefore\ x=t+4a^{2t}\ln a$
따라서 점 B의 좌표는
$\mathrm{B}(t+4a^{2t}\ln a,\ 0)$
한편, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면
$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{HB}}}=\dfrac{t}{4a^{2t}\ln a}$
이때 $f(t)=\dfrac{t}{4a^{2t}\ln a}$라 하면
$f'(t)=\dfrac{4a^{2t}\ln a-t\cdot 4a^{2t}\cdot 2(\ln a)^2}{(4a^{2t}\ln a)^2}$
$=\dfrac{4a^{2t}\ln a(1-2t\ln a)}{(4a^{2t}\ln a)^2}$
$f'(t)=0$에서
$1-2t\ln a=0$
따라서 $t=\dfrac{1}{2\ln a}$이고, 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{1}{2\ln a}$에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.
따라서 $\dfrac{1}{2\ln a}=\dfrac{1}{6}$이므로
$\ln a=3$, 즉 $a=e^3$

28 정답 ④

해설 $h_1(x)=(x-a-1)^2e^x$,
$h_2(x)=e^{2a}(x-a)+e^a$이라 하면
$f(x)=\begin{cases}h_1(x) & (x\ge a)\\ h_2(x) & (x<a)\end{cases}$이고,
$h_1'(x)=2(x-a-1)e^x+(x-a-1)^2e^x$
$=(x-a-1)(x-a+1)e^x$
$h_2'(x)=e^{2a}$
$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}(x-a-1)(x-a+1)e^x & (x>a)\\ e^{2a} & (x<a)\end{cases}$
이때 $f(a)=e^a$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값이 $g(t)$이므로

$t \le e^a$일 때, $h_2(g(t))=t$

$t > e^a$일 때, $h_1(g(t))=t$가 성립한다.

또한, 함수 $g(t)$는 $t=e^a$에서 불연속이므로

$e^a=4$

$t=f(a+1)=0<e^a$이므로

$h_2'(g(t))\cdot g'(t)=1$에서

$h_2'(g(f(a+1)))\cdot g'(f(a+1))=1$

직선 $y=h_2(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α ($\alpha<a$)라 하면 $g(0)=\alpha$이므로

$$g'(f(a+1))=\frac{1}{h_2'(g(f(a+1)))}$$

$$=\frac{1}{h_2'(\alpha)}=\frac{1}{e^{2a}} \quad \cdots ㉠$$

$t=f(a+7)=36e^{a+7}>e^a$이므로

$h_1'(g(t))\cdot g'(t)=1$

$h_1'(g(f(a+7)))\cdot g'(f(a+7))=1$

$$g'(f(a+7))=\frac{1}{h_1'(g(f(a+7)))}$$

$$=\frac{1}{h_1'(a+7)}=\frac{1}{6\cdot 8\cdot e^{a+7}}$$

$$=\frac{1}{48e^{a+7}} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $e^a=4$이므로

$$\frac{g'(f(a+1))}{g'(f(a+7))}=\frac{48e^{a+7}}{e^{2a}}=\frac{48e^7}{e^a}$$

$$=\frac{48}{4}e^7=12e^7$$

29 정답 80

해설 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+8\ln(x^2+4)+a$에서

$$f'(x)=x^2-4x+\frac{16x}{x^2+4}$$

$$=\frac{x^2(x-2)^2}{x^2+4}$$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또한, $f''(x)=\frac{2x(x-2)(x^3+8x-8)}{(x^2+4)^2}$이고

$h(x)=x^3+8x-8$이라 하면

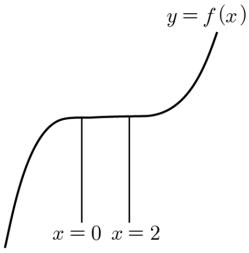
$h'(x)=3x^2+8>0$이므로 $h(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하면 $h(0)=-8$, $h(2)=16$이므로

$0<\alpha<2$

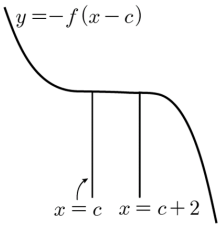
따라서 변곡점은 $(0, f(0))$, $(\alpha, f(\alpha))$, $(2, f(2))$이고 변곡점에서의 미분계수는

$f'(0)=0$, $f'(\alpha)>0$, $f'(2)=0$

즉, 곡선 $y=f(x)$의 개형은 그림과 같다.

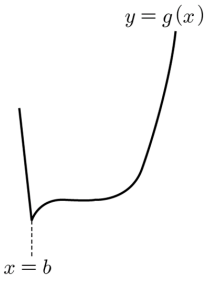


또한, 곡선 $y=-f(x-c)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 c만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 곡선 $y=-f(x-c)$의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=b$에서 연속이어야 한다.

이때 $a\ge 0$인 경우에 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, $\lim_{x\to b-} g'(x)<0$, $\lim_{x\to b+} g'(x)\ge 0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

$a<0$인 경우

$f(0)=16\ln 2+a$, $f'(0)=0$,

$f(2)=-\frac{16}{3}+24\ln 2+a$, $f'(2)=0$이고,

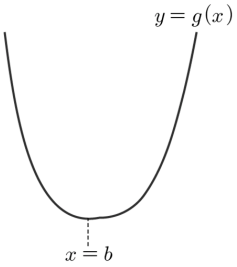
$x<b$에서 $\lim_{x\to b-} g'(x)\le 0$,

$x\ge b$에서 $\lim_{x\to b+} g'(x)\ge 0$이므로 $x=b$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to b-} g'(x)=\lim_{x\to b+} g'(x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to b} g'(x)=0$$

따라서 $|f(0)|=|f(2)|$, $b=2$, $c=2$이면
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



즉, $-16\ln 2-a=-\frac{16}{3}+24\ln 2+a$에서

$a=\frac{8}{3}-20\ln 2$

$\therefore\ a+b+c=\left(\frac{8}{3}-20\ln 2\right)+2+2$

$=\frac{20}{3}-20\ln 2$

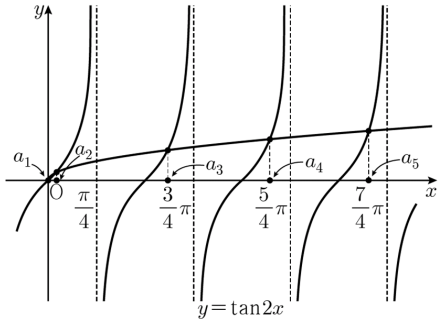
따라서 $p=\frac{20}{3}$, $q=-20$이므로

$3(p-q)=3\left\{\frac{20}{3}-(-20)\right\}$

$=20+60=80$

30 정답 1

해설 두 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{4}$, $y=\tan 2x$의 그래프와 수열 $\{a_n\}$을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이때 $\frac{\sqrt{a_n}}{4}=\tan 2a_n$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan(2a_{n+1}-2a_n)$

$=\frac{\tan 2a_{n+1}-\tan 2a_n}{1+\tan 2a_{n+1}\tan 2a_n}$

$=\frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{4}-\frac{\sqrt{a_n}}{4}}{1+\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{a_n}}{4}}$

$=\frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{4}}{\frac{16+\sqrt{a_{n+1}a_n}}{16}}$

$=4\cdot\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{16+\sqrt{a_{n+1}a_n}}$

$=\frac{4(a_{n+1}-a_n)}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})(16+\sqrt{a_{n+1}a_n})}$

$\therefore\ \tan^2(2a_{n+1}-2a_n)$

$=\frac{16(a_{n+1}-a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2(16+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}$

한편, 곡선 $y=\tan 2x$의 점근선의 방정식은

$x=\frac{2n-1}{4}\pi$ (n은 정수)이고,

$n\to\infty$일 때 $\frac{\sqrt{a_n}}{4}\to\infty$이므로 위의 그래프에서

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n-3}{4}\pi\right)=0$

이때 $b_n=a_n-\frac{2n-3}{4}\pi$라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}+\frac{2n-1}{4}\pi-b_n-\frac{2n-3}{4}\pi\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}-b_n+\frac{\pi}{2}\right)$

$=0-0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$$2 \quad 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}+\frac{2n-1}{4}\pi}{b_n+\frac{2n-3}{4}\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{n}+\frac{2n-1}{4n}\pi}{\frac{b_n}{n}+\frac{2n-3}{4n}\pi}$$

$$=\frac{0+\frac{\pi}{2}}{0+\frac{\pi}{2}}=1$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)^2}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+\sqrt{\frac{a_n}{a_n}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)^2=4$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(16+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)^2}{{a_n}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{a_n}+\frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{a_n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{a_n}+\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right)^2$$

$$=\left(0+\sqrt{1}\right)^2=1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}{a_n}^3\tan^2\left(2a_{n+1}-2a_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16{a_n}^3\left(a_{n+1}-a_n\right)^2}{\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)^2\left(16+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16\left(a_{n+1}-a_n\right)^2}{\frac{\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)^2\left(16+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)^2}{{a_n}^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16\left(a_{n+1}-a_n\right)^2}{\frac{\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)^2}{a_n}\cdot\frac{\left(16+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)^2}{{a_n}^2}}$$

$$=\frac{16\cdot\frac{\pi^2}{4}}{4\cdot1}=\pi^2$$

$$\therefore \frac{1}{\pi^2}\cdot\lim_{n\to\infty}{a_n}^3\tan^2\left(2a_{n+1}-2a_n\right)=1$$