

미적분 2025학년도 6월 모의고사 변형(2024년 시행)

고3 24년 6월

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을
입력해 보세요!



| 지수법칙(2) : 지수가 유리수일 때 | 정답률 90%

01

[2024년 6월 고3 1번 변형]

$\left(\frac{16}{\sqrt[3]{32}}\right)^{\frac{3}{7}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

| 미분계수를 이용하여 극한값 구하기 | 정답률 84%

02

[2024년 6월 고3 2번 변형]

함수 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

| Σ의 성질 | 정답률 80%

03

[2024년 6월 고3 3번 변형]

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^6 (a_k + 2) = 15$ 이고 $a_7 = 6$ 일 때,

$\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값은?

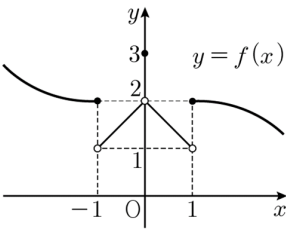
- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

| 함수의 우극한과 좌극한(2) : 그래프가 주어진 경우 | 정답률 87%

04

[2024년 6월 고3 4번 변형]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

| 곱의 미분법(1) : $y=f(x)g(x)$ 꼴 | 정답률 90%

05

[2024년 6월 고3 5번 변형]

함수 $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

| 각 $\pi/2 \pm \theta$ 의 사인함수와 코사인함수 | 정답률 76%

06

[2024년 6월 고3 6번 변형]

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{12}{13}$ 일 때,

$\sin\theta$ 의 값은?

- ① $-\frac{12}{13}$
- ② $-\frac{5}{13}$
- ③ $\frac{5}{12}$
- ④ $\frac{5}{13}$
- ⑤ $\frac{12}{13}$

| 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 개수 | 정답률 82%

07

[2024년 6월 고3 7번 변형]

x 에 대한 방정식 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱은?

- ① -27
- ② -29
- ③ -31
- ④ -33
- ⑤ -35

| 등비수열의 일반항 구하기(3) : $a_i+a_j=k$ 형태(a_i 와 a_j 의 사칙연산 형태)로 주어진 경우 | 정답률 79%

08

[2024년 6월 고3 8번 변형]

$a_1a_2 < 0$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 = 5, 3a_8 - 11a_7 = 20$ 일 때, $a_9 + a_{10}$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{9}$
- ② $-\frac{10}{81}$
- ③ $-\frac{11}{81}$
- ④ $\frac{10}{81}$
- ⑤ $\frac{11}{81}$

| 미분가능성과 연속성(3) : 구간에 따라 다르게 정의된 함수 | 정답률 75%

09

[2024년 6월 고3 9번 변형]

함수 $f(x) = \begin{cases} x-2 & (x < 0) \\ -2x^2+1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $(f(x)+a)^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
상수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$
- ② $\frac{1}{4}$
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{2}$
- ⑤ 1

| 삼각형의 넓이(4) : 한 변의 길이와 양 끝 각의 크기가 주어진 경우 | 정답률 53%

10

[2024년 6월 고3 10번 변형]

다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가
 16π 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $4\sin A = 3\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

- ① $\frac{155}{64}\sqrt{53}$
- ② $\frac{5}{2}\sqrt{53}$
- ③ $\frac{165}{64}\sqrt{53}$
- ④ $\frac{5}{2}\sqrt{55}$
- ⑤ $\frac{165}{64}\sqrt{55}$

| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 | 정답률 70%

- 11
- [2024년 6월 고3 11번 변형]
- 최고차항의 계수가 2이고 $f(0) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-3}{x-a} = 2$$
를 만족시킨다.
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 y 절편이 1일 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)
- ① 2

② 4

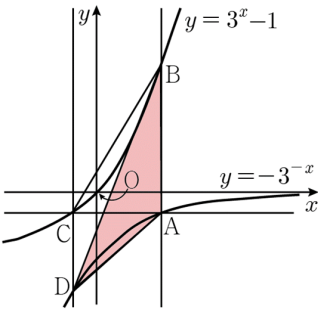
③ 6

④ 8

⑤ 10

| 지수함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 49%

- 12
- [2024년 6월 고3 12번 변형]
- 다음 그림과 같이 곡선 $y = -3^{-x}$ 위의 제4사분면에 있는 점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = 3^x - 1$ 과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = 3^x - 1$ 과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y 축에 평행한 직선이 $y = -3^{-x}$ 과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ 일 때, 삼각형 ABD의 넓이는?



- ① $\frac{7}{3} - \frac{7}{6} \log_3 2$

② $\frac{8}{3} - \frac{4}{3} \log_3 2$

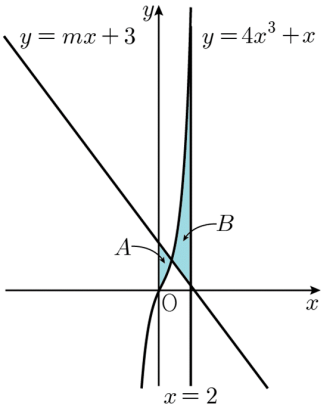
③ $3 - \frac{3}{2} \log_3 2$

④ $\frac{10}{3} - \frac{5}{3} \log_3 2$

⑤ $\frac{11}{3} - \frac{11}{6} \log_3 2$

| 곡선과 직선 사이의 넓이 | 정답률 55%

13 [2024년 6월 고3 13번 변형]
곡선 $y = 4x^3 + x$ 와 직선 $y = mx + 3$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y = 4x^3 + x$ 와 두 직선 $y = mx + 3$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $B - A = 16$ 일 때, 상수 m 의 값은?
(단, $m < -1$)



- ① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{5}{3}$

③ $-\frac{11}{6}$
- ④ -2

⑤ $-\frac{13}{6}$

| 로그의 진수에 미지수를 포함하는 부등식의 응용 | 정답률 51%

14 [2024년 6월 고3 14번 변형]
다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은?

$\log_3 \sqrt{-n^2 + 8n + 48} - \log_9 (48 - kn)$ 의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수가 9이다.

- ① 6

② 7

③ 8
- ④ 9

⑤ 10

| 정적분의 계산(3) : 구간에 따라 다르게 정의된 함수 | 정답률 31%

15

[2024년 6월 고3 15번 변형]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수 k ($k \geq 0$)에 대하여

함수 $g(x) = \begin{cases} 3x - k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여
$$\int_0^x g(t)\{|t(t-2)| + t(t-2)\}dt \geq 0$$
이고
$$\int_3^x g(t)\{|(t-2)(t+1)| - (t-2)(t+1)\}dt \geq 0$$
이다.

$g(k+4)$ 의 최솟값은?

- ① 35 ② 40 ③ 45
- ④ 50 ⑤ 55

| 로그의 진수에 미지수를 포함하는 방정식 : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | 정답률 80%

16

[2024년 6월 고3 16번 변형]

방정식 $\log_3(x+2) - 3 = \log_{\frac{1}{3}}(x-4)$ 을 만족시키는

실수 x 의 값을 구하시오.

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : $f'(x)$ 로부터 $f(x)$ 구하기 | 정답률 90%

17

[2024년 6월 고3 17번 변형]

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 9x^2 + 4x$ 이고
 $f(0) = 1$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

| 자연수의 거듭제곱의 합(1) : 기본 공식을 이용하는 경우 | 정답률 80%

18

[2024년 6월 고3 18번 변형]

$\sum_{k=1}^8 (ak^2 - 6k) = 600$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

| 위치와 위치의 변화량 | 정답률 64%

19

[2024년 6월 고3 19번 변형]

시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 7t + 10 & (0 \leq t \leq 4) \\ k(t-4) - 2 & (t > 4) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 $\frac{14}{3}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

| $y=asin(bx+c)+d$ 의 성질 | 정답률 51%

20

[2024년 6월 고3 20번 변형]

4 이하의 두 자연수 a, b 에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $y = a \sin x + b$ 의 그래프가

직선 $y = a + b$ 와 만나는 점의 집합을 A 라 하고,

두 직선 $y = 1, y = 3$ 과 만나는 점의 집합을 각각 B, C 라 하자. $n(A \cup B \cup C) = 4$ 가 되도록 하는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 ab 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값을 구하시오.

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : $f'(x)$ 로부터 $f(x)$ 구하기 | 정답률 32%

21 [2024년 6월 고3 21번 변형]
최고차항의 계수가 3인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f'(a) \leq 0$ 인 실수 a 의 최댓값은 3이다.
(나) 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$ 의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 81이다.

$f(0) = 0, f'(2) = 0$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 32%

22 [2024년 6월 고3 22번 변형]
수열 $\{a_n\}$ 은 $a_2 = -a_1$ 이고, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n - \sqrt{n} \cdot a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n} \text{ 이 자연수이고, } a_n > 0 \text{ 인 경우}) \\ a_n + 2 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{12} = 1$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합이

$\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소이다.)

| 등비수열의 극한(1) | 정답률 89%

23

[2024년 6월 고3 미적분 23번 변형]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$
의 값은?

- ① 9 ② 8 ③ 7
- ④ 6 ⑤ 5

| 음함수의 미분법의 응용 | 정답률 78%

24

[2024년 6월 고3 미적분 24번 변형]

곡선 $3x \sin 4y - 2x = -2$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는?

- ① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{6}$
- ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

| 급수와 수열의 극한값 사이의 관계(2) | 정답률 80%

25

[2024년 6월 고3 미적분 25번 변형]

수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{7n^2+5}{3n^2-2n}\right)=5$ 를 만족시킬 때,
 $\lim_{n\rightarrow\infty}(a_n^2-3a_n)$ 의 값은?

① $-\frac{14}{9}$

② $-\frac{10}{9}$

③ $-\frac{2}{3}$

④ $-\frac{2}{9}$

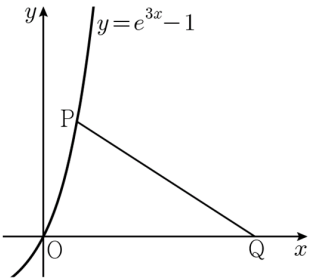
⑤ $\frac{2}{9}$

| 지수, 로그함수의 활용(1) : 그래프, 좌표 | 정답률 71%

26

[2024년 5월 고3 미적분 25번 변형]

곡선 $y=e^{3x}-1$ 위의 점 $P(2t, e^{6t}-1)$ ($t>0$)에
대하여 $\overline{PQ}-\overline{OQ}=0$ 를 만족시키는 x 축 위의 점 Q 의
 x 좌표를 $f(t)$ 라 할 때, $\lim_{t\rightarrow 0+}\frac{f(t)}{t}$ 의 값은?
(단, O 는 원점이다.)



- ① 10

② 9

③ 8

④ 7

⑤ 6

| 함수의 최대,최소의 활용 | 정답률 50%

27

[2024년 6월 고3 미적분 27번 변형]

상수 $a\ (a > 1)$ 과 실수 $t\ (t > 0)$ 에 대하여
곡선 $y = 2 \cdot a^x$ 위의 점 $A(t, 2a^t)$ 에서의 접선을 l 이라
하자. 점 A 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선이 x 축과
만나는 점을 B , y 축과 만나는 점을 C 라 하자. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 의
값이 $t = \frac{1}{6}$ 에서 최대일 때, a 의 값은?

① $\sqrt{e}$

② e

③ e^2

④ e^3

⑤ e^6

| 역함수의 미분법의 응용 | 정답률 50%

28

[2024년 6월 고3 미적분 28번 변형]

함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} (x-a-1)^2e^x & (x \geq a) \\ e^{2a}(x-a)+e^a & (x < a) \end{cases}$ 일 때,
실수 t 에 대하여 $f(x) = t$ 를 만족시키는 x 의 최솟값을
 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t = 4$ 에서만 불연속일 때,
 $\frac{g'(f(a+1))}{g'(f(a+7))}$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

① $12e^6$

② $16e^6$

③ $20e^6$

④ $12e^7$

⑤ $16e^7$

14

| 지수, 로그함수의 미분가능성 | 정답률 31%

29

[2024년 6월 고3 미적분 29번 변형]

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8\ln(x^2 + 4) + a$

(a 는 상수)와 두 양수 b, c 에 대하여

함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$ 는 실수 전체의

집합에서 미분가능하다. $a + b + c = p + q\ln 2$ 일 때,
 $3(p - q)$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 유리수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.)

| 삼각함수 덧셈정리 활용(1) : 방정식, 함수 | 정답률 31%

30

[2024년 6월 고3 미적분 30번 변형]

함수 $y = \frac{\sqrt{x}}{4}$ 의 그래프와 함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프가

만나는 모든 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할
때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$\frac{1}{\pi^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(2a_{n+1} - 2a_n)$ 의 값을 구하시오.

미적분 2025학년도 6월 모의고사 변형(2024년 시행)

고3 24년 6월

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을
입력해 보세요!



01 정답 ⑤

해설 $\left(\frac{16}{\sqrt[3]{32}}\right)^{\frac{3}{7}} = \left(\frac{2^4}{2^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{3}{7}}$
 $= \left(2^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{7}} = 2$

02 정답 ③

해설 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 에서
 $f'(x) = 2x + 2$
 $\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$
 $= 2 \cdot 3 + 2$
 $= 8$

03 정답 ④

해설 $\sum_{k=1}^6 (a_k + 2) = \sum_{k=1}^6 a_k + \sum_{k=1}^6 2$
 $= \sum_{k=1}^6 a_k + 2 \cdot 6$
 $= 15$
에서
 $\sum_{k=1}^6 a_k = 15 - 12 = 3$
 $\therefore \sum_{k=1}^7 a_k = \sum_{k=1}^6 a_k + a_7$
 $= 3 + 6 = 9$

04 정답 ④

해설 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 + 2 = 4$

05 정답 ④

해설 $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$ 에서
 $f'(x) = 2x(x^2 + x + 2) + (x^2 + 1)(2x + 1)$ 이므로
 $f'(1) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$

06 정답 ②

해설 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{12}{13}$ 에서
 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\}$
 $= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
 $= -\cos\theta$
따라서 $-\cos\theta = -\frac{12}{13}$, 즉 $\cos\theta = \frac{12}{13}$ 이고
 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\sin\theta < 0$ 이므로
 $\sin\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$
 $= -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2}$
 $= -\sqrt{\frac{25}{169}}$
 $= -\frac{5}{13}$

07 정답 ⑤

해설 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + k$ 로 놓으면
 $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1, x = 2$
 $f(-1) = k + \frac{7}{2}, f(2) = k - 10$
삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = -1$ 에서
극댓값 $k + \frac{7}{2}$ 을 갖고, $x = 2$ 에서 극솟값 $k - 10$ 을
갖는다.
이때 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가
되려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로
 $k + \frac{7}{2} = 0$ 또는 $k - 10 = 0$
즉, $k = -\frac{7}{2}$ 또는 $k = 10$ 이므로 조건을 만족시키는 모든
실수 k 의 값의 곱은
 $-\frac{7}{2} \cdot 10 = -35$

08 정답 ②

해설 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $a_6 = 5$ 이므로
 $a_8 = a_6 \cdot r^2 = 5r^2, a_7 = a_6 \cdot r = 5r$
이때 $3a_8 - 11a_7 = 20$ 이므로
 $3 \cdot 5r^2 - 11 \cdot 5r = 20$
 $3r^2 - 11r - 4 = 0, (3r+1)(r-4) = 0$
이때 $a_1 a_2 < 0$ 에서 $r < 0$ 이므로
 $r = -\frac{1}{3}$
 $\therefore a_9 + a_{10} = a_6 \cdot r^3 + a_6 \cdot r^4$
 $= 5 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)$
 $= -\frac{10}{81}$

09 정답 ④

해설 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서만 불연속이므로
함수 $(f(x) + a)^2$ 이 $x = 0$ 에서 연속이 되도록 a 의 값을
정한다.
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) + a)^2 = (f(0) + a)^2$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2 + a)^2 = (1 + a)^2$
 $(-2 + a)^2 = (1 + a)^2$
 $a^2 - 4a + 4 = a^2 + 2a + 1, 6a = 3$
 $\therefore a = \frac{1}{2}$

10 정답 ⑤

해설 삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$ 라 하고
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하자.
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 16π 이므로
 $\pi R^2 = 16\pi$, 즉 $R = 4$
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
조건 (가)에서 $4\sin A = 3\sin B$ 이므로
 $4 \cdot \frac{a}{2R} = 3 \cdot \frac{b}{2R}$
 $b = \frac{4}{3}a \quad \dots \textcircled{1}$
조건 (나)에서 $\cos B = \cos C$ 이므로
 $b = c \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 양수 k 에 대하여 $a = 3k$ 라 하면
 $b = c = 4k$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $= \frac{(4k)^2 + (4k)^2 - (3k)^2}{2 \cdot 4k \cdot 4k} = \frac{23}{32}$
 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$
 $= \sqrt{1 - \left(\frac{23}{32}\right)^2} = \frac{3}{32} \sqrt{55}$
 $\frac{a}{\sin A} = 2R = 2 \cdot 4 = 8$ 에서
 $a = 8\sin A = 8 \cdot \frac{3}{32} \sqrt{55} = \frac{3}{4} \sqrt{55}$,
 $b = c = \frac{4}{3}a = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{55} = \sqrt{55}$
따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{55} \cdot \sqrt{55} \cdot \frac{3}{32} \sqrt{55}$
 $= \frac{165}{64} \sqrt{55}$

11 정답 ④

해설 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이고
 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = 2x^3 + px^2 + qx$ (p, q 는 상수)로
 놓을 수 있다.
 이때 $f'(x) = 6x^2 + 2px + q$ 이고 삼차함수 $f(x)$ 는
 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 3}{x - a} = 2$ 에서 $f(a) = 3$ 이고 $f'(a) = 2$ 이다.
 한편, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의
 방정식은 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 이므로
 $y = 2(x - a) + 3$, 즉 $y = 2x - 2a + 3$ 이다.
 이 접선의 y 절편이 1이므로
 $-2a + 3 = 1$
 $\therefore a = 1$
 따라서 $f(1) = 3, f'(1) = 2$ 이므로
 $f(1) = 2 + p + q = 3$ 에서
 $p + q = 1 \quad \dots \textcircled{㉠}$
 $f'(1) = 6 + 2p + q = 2$ 에서
 $2p + q = -4 \quad \dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하면
 $p = -5, q = 6$
 따라서 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x$ 이므로
 $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 8$

12 정답 ①

해설 두 점 A, B의 x 좌표를 a 라 하면
 $A(a, -3^{-a}), B(a, 3^a - 1)$ 이므로
 $\overline{AB} = 3^a - 1 - (-3^{-a}) = 3^a + 3^{-a} - 1$
 또, 두 점 C, D의 x 좌표를 c 라 하면
 $C(c, 3^c - 1), D(c, -3^{-c})$ 이므로
 $\overline{CD} = 3^c - 1 - (-3^{-c}) = 3^c + 3^{-c} - 1$
 이때 두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로
 $3^c - 1 = -3^{-a}$
 $\therefore \overline{CD} = -3^{-a} + 1 + \frac{1}{-3^{-a} + 1} - 1$
 $= -3^{-a} + \frac{1}{-3^{-a} + 1}$
 주어진 조건에 의하여 $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ 이므로
 $3^a + 3^{-a} - 1 = -2 \cdot 3^{-a} + \frac{2 \cdot 3^a}{3^a - 1}$
 이때 $3^a = t$ 라 하면
 $t + \frac{1}{t} - 1 = -\frac{2}{t} + \frac{2t}{t - 1}$
 양변에 $t(t - 1)$ 을 곱하여 정리하면
 $t^2(t - 1) + t - 1 - t(t - 1) = -2(t - 1) + 2t^2$
 $t^3 - 4t^2 + 4t - 3 = 0, (t - 3)(t^2 - t + 1) = 0$
 이때 t 는 실수이므로
 $t = 3$
 즉, $3^a = 3$ 이므로
 $a = 1$
 이때 $3^c = 1 - 3^{-a} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로
 $c = \log_3 \frac{2}{3} = \log_3 2 - 1$
 따라서 조건을 만족시키는 삼각형 ABD의 넓이는
 $\frac{1}{2} \cdot (a - c) \cdot (3^a + 3^{-a} - 1)$
 $= \frac{1}{2} \cdot (1 - \log_3 2 + 1) \cdot \left(3 + \frac{1}{3} - 1\right)$
 $= \frac{7}{6} (2 - \log_3 2)$
 $= \frac{7}{3} - \frac{7}{6} \log_3 2$

13 정답 ④

해설 $f(x) = 4x^3 + x$, $g(x) = mx + 3$ 라 하고
 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 α 라 하면

$$A = \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$B = \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$\therefore B - A$$

$$= \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx - \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_0^{\alpha} \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 \{(4x^3 + x) - (mx + 3)\} dx$$

$$= \left[x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{m}{2}x^2 - 3x \right]_0^2$$

$$= 16 + 2 - 2m - 6$$

$$= -2m + 12 = 16$$

$$\therefore m = -2$$

14 정답 ②

해설 $\log_3 \sqrt{-n^2 + 8n + 48}$ 에서
 진수 조건에 의하여
 $\sqrt{-n^2 + 8n + 48} > 0$, 즉 $-n^2 + 8n + 48 > 0$ 에서
 $n^2 - 8n - 48 < 0$, $(n+4)(n-12) < 0$
 $\therefore -4 < n < 12$
 이때 n 이 자연수이므로
 $1 \leq n < 12 \quad \dots \textcircled{1}$
 또, $\log_9(48 - kn)$ 에서 진수 조건에 의하여
 $48 - kn > 0$, 즉 $n < \frac{48}{k} \quad \dots \textcircled{2}$
 한편, $\log_3 \sqrt{-n^2 + 8n + 48} - \log_9(48 - kn)$ 의 값이
 양수이므로
 $\log_3 \sqrt{-n^2 + 8n + 48} - \log_9(48 - kn) > 0$
 $\log_9(-n^2 + 8n + 48) - \log_9(48 - kn) > 0$
 $\log_9(-n^2 + 8n + 48) > \log_9(48 - kn)$
 이때 밑 9가 1보다 크므로
 $-n^2 + 8n + 48 > 48 - kn$
 $n(n - 8 - k) < 0$
 k 가 자연수이므로
 $0 < n < 8 + k \quad \dots \textcircled{3}$
 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 9이므로
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $8 + k > 9$ 이어야 한다.
 즉, $k > 1$ 이어야 하므로
 (i) $k = 2$ 일 때,
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $1 \leq n < 10$

따라서 자연수 n 의 개수가 9이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
 (ii) $k = 3$ 일 때,
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $1 \leq n < 11$
 따라서 자연수 n 의 개수가 10이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
 (iii) $k = 4$ 일 때,
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $1 \leq n < 12$
 따라서 자연수 n 의 개수가 11이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
 (iv) $k = 5$ 일 때,
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $1 \leq n < \frac{48}{5}$
 따라서 자연수 n 의 개수가 9이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
 (v) $k \geq 6$ 일 때,
 $\frac{48}{k} < 9$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
 (i) ~ (v)에서
 $k = 2$ 또는 $k = 5$
 따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은
 $2 + 5 = 7$

15 정답 ②

해설 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

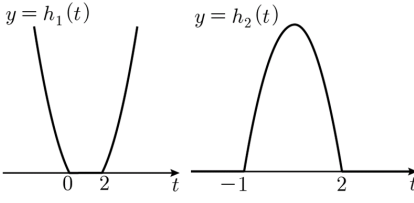
$$g(x) = \begin{cases} 3x - k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3 & (x < k) \\ f'(x) & (x > k) \end{cases}$$

 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라 하면
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 또한, $h_1(t) = |t(t-2)| + t(t-2)$,
 $h_2(t) = |(t-2)(t+1)| - (t-2)(t+1)$ 이라 하면

$$h_1(t) = \begin{cases} 2t(t-2) & (t \leq 0 \text{ 또는 } t \geq 2) \\ 0 & (0 < t < 2) \end{cases}$$

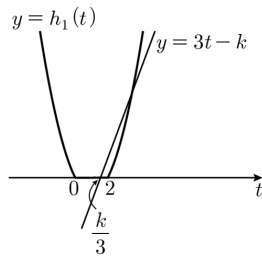
$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2) \\ -2(t-2)(t+1) & (-1 < t < 2) \end{cases}$$

 따라서 두 함수 $y = h_1(t)$, $y = h_2(t)$ 의 그래프는 각각 다음과 같다.

 한편, p 가 상수일 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_p^x h(t) dt \geq 0$$
이기 위해서는 구간 $[p, x]$ 에서는
 $h(t) \geq 0$ 이고 구간 $[x, p]$ 에서는 $h(t) \leq 0$ 이어야 한다.
 (i) 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x g(t)h_1(t)dt \geq 0 \text{이므로 그림과 같이}$$

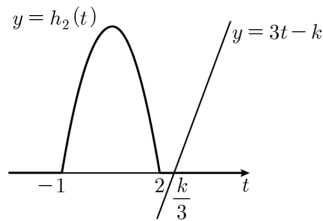
$$0 \leq \frac{k}{3} \leq 2, \text{ 즉 } 0 \leq k \leq 6 \text{이어야 한다.}$$



(ii) 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_3^x g(t)h_2(t)dt \geq 0 \text{이므로 그림과 같이}$$

$$\frac{k}{3} \geq 2, \text{ 즉 } k \geq 6 \text{이어야 한다.}$$



(i), (ii)에 의하여 $k = 6$

이때 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = k = 6$ 에서도 미분가능하고 연속이다.

$$g'(6) = f'(6) = 3 \text{에서}$$

$$108 + 12a + b = 3, b = -12a - 105$$

$$g(6) = f(6) = 12 \text{에서 } 216 + 36a + 6b + c = 12$$

$$c = -36a - 6b - 204$$

$$= -36a + 6(12a + 105) - 204 = 36a + 426$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2$$

$$- (12a + 105)x + 36a + 426 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 증가하므로 $g'(x) \geq 0$ 이다.

따라서 $x > 6$ 일 때, $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } f'(x) = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3} \text{에서}$$

$$(a) -\frac{a}{3} < 6, \text{ 즉 } a > -18 \text{일 때}$$

$$f'(6) = 108 + 12a + b = 108 + 12a - 12a - 105 = 3 > 0$$

이므로 조건을 만족시킨다.

$$\therefore a > -18 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(b) -\frac{a}{3} \geq 6, \text{ 즉 } a \leq -18 \text{일 때}$$

$$b - \frac{a^2}{3} \geq 0, \text{ 즉 } a^2 - 3b \leq 0 \text{이어야 함으로}$$

$$a^2 - 3b = a^2 - 3(-12a - 105) \leq 0$$

$$a^2 + 36a + 315 \leq 0, (a + 15)(a + 21) \leq 0$$

$$-21 \leq a \leq -15 \text{이므로}$$

$$-21 \leq a \leq -15 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$a \geq -21 \quad \dots \textcircled{3}$$

③에 $x = 10$ 을 대입하면 ②에 의하여

$$g(k+4) = g(10) = f(10)$$

$$= 1000 + 100a - 10(12a + 105) + 36a + 426$$

$$= 16a + 376 \geq 40$$

따라서 $g(10)$ 의 최솟값은 40이다.

16 정답 7

해설 로그의 진수의 조건에 의하여

$$x + 2 > 0, x - 4 > 0$$

$$\text{즉, } x > 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-4) = -\log_3(x-4) \text{이므로}$$

$$\log_3(x+2) - 3 = \log_{\frac{1}{3}}(x-4) \text{에서}$$

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = 3$$

$$\log_3(x+2)(x-4) = 3$$

$$(x+2)(x-4) = 3^3 = 27$$

$$x^2 - 2x - 8 = 27, (x+5)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 7$$

이때 ①에 의하여

$$x = 7$$

17 정답 33

해설 $f'(x) = 9x^2 + 4x$ 이므로

$$f(x) = \int (9x^2 + 4x)dx$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로

$$C = 1$$

따라서 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ 이므로

$$f(2) = 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 1 = 33$$

18 정답 4

$$\text{해설 } \sum_{k=1}^8 (ak^2 - 6k)$$

$$= a \sum_{k=1}^8 k^2 - 6 \sum_{k=1}^8 k$$

$$= a \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} - 6 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2}$$

$$= 204a - 216 = 600$$

$$204a = 816$$

$$\therefore a = 4$$

19 정답 3

해설 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서 $v(t) = 0$ 이다.

$$0 \leq t \leq 4 \text{ 일 때, } t^2 - 7t + 10 = 0 \text{ 에서 } (t-2)(t-5) = 0$$

이때 $0 \leq t \leq 4$ 이므로

$$t = 2$$

$t > 4$ 일 때, $k(t-4) - 2 = 0$ 에서

$$kt = 4k + 2$$

$$t = 4 + \frac{2}{k}$$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는

시각은 $t = 4 + \frac{2}{k}$ 이다.

이때 원점을 출발한 점 P의 시각 $t = 4 + \frac{2}{k}$ 에서의

위치가 $\frac{14}{3}$ 이므로

$$\int_0^{4+\frac{2}{k}} v(t) dt = \frac{14}{3} \text{ 에서}$$

$$\int_0^4 v(t) dt + \int_4^{4+\frac{2}{k}} v(t) dt$$

$$= \int_0^4 (t^2 - 7t + 10) dt + \int_4^{4+\frac{2}{k}} (kt - 4k - 2) dt$$

이때 두 식을 각각 풀어서 정리하면

$$\int_0^4 (t^2 - 7t + 10) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t \right]_0^4$$

$$= \frac{64}{3} - 56 + 40 = \frac{16}{3} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

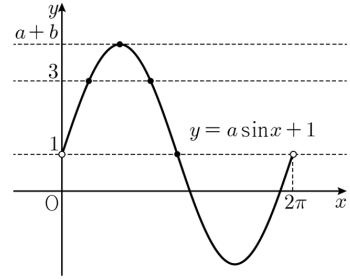
$$\int_4^{4+\frac{2}{k}} (kt - 4k - 2) dt = \left[\frac{1}{2}kt^2 - (4k+2)t \right]_4^{4+\frac{2}{k}} = -\frac{2}{k} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\int_0^4 v(t) dt + \int_4^{4+\frac{2}{k}} v(t) dt = \frac{16}{3} + \left(-\frac{2}{k} \right) = \frac{14}{3}$$

따라서 $\frac{2}{k} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$k = 3$$



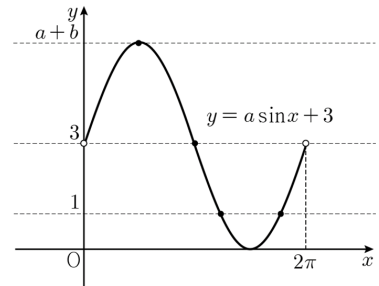
함수 $y = a \sin x + b$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 은 한 점에서 만나므로 $n(A \cup B \cup C) = 4$ 를 만족시키려면 $a+1 > 3$ 이므로 $a > 2$ 에서 자연수 a, b 의 순서쌍은 $(3, 1), (4, 1)$ 이다.

(ii) $b = 2$ 인 경우

$n(A \cup B \cup C) = 4$ 를 만족시키려면

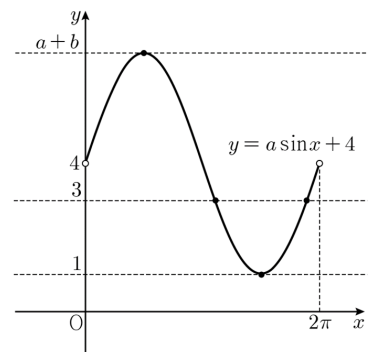
$a+2 > 3, -a+2 = 1$ 이므로 $a > 1, a = 1$ 에서 자연수 a, b 의 순서쌍은 존재하지 않는다.

(iii) $b = 3$ 인 경우



함수 $y = a \sin x + b$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 은 한 점에서 만나므로 $n(A \cup B \cup C) = 4$ 를 만족시키려면 $-a+3 < 1$ 이어야 하므로 $a > 2$ 에서 자연수 a, b 의 순서쌍은 $(3, 3), (4, 3)$ 이다.

(iv) $b = 4$ 인 경우



$n(A \cup B \cup C) = 4$ 를 만족시키려면

$-a+4 = 1$ 이므로 $a = 3$ 에서 자연수 a, b 의 순서쌍은 $(3, 4)$ 이다.

따라서 ab 의 최댓값과 최솟값은 각각

$$M = 12, m = 3 \text{ 이므로}$$

$$Mm = 36$$

20 정답 36

해설 직선 $y = a + b$ 는 함수 $y = a \sin x + b$ 의 그래프와 항상 한 점에서 만나므로

(i) $b = 1$ 인 경우

21 정답 65

해설 조건 (나)에서 방정식 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상인 실수 k 의 값이 존재하므로
삼차방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
삼차방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 세 실근을 각각 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 하면 부등식 $f'(x) \leq 0$ 의 해가 $x \leq \alpha$ 또는 $\beta \leq x \leq \gamma$ 이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma = 3$

이때 $f'(2) = 0, f'(3) = 0$ 에서 $b \neq 2, b < 3$ 인

상수 b 에 대하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12(x-2)(x-3)(x-b) \\ &= 12x^3 - 12(b+5)x^2 + 12(5b+6)x - 72b \end{aligned}$$

라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= 3x^4 - 4(b+5)x^3 + 6(5b+6)x^2 - 72bx + C \\ &\quad (C \text{는 상수}) \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 0$ 에서 $C = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 - 4(b+5)x^3 + 6(5b+6)x^2 - 72bx \quad \dots \textcircled{1} \\ &\quad + 6(5b+6)x^2 - 72bx \end{aligned}$$

이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $b < 2$ 이고 $f(b) < f(3)$ 인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(3) = 81$ 이어야 하므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} f(3) &= 243 - 108(b+5) + 54(5b+6) - 216b \\ &= -54b + 27 = 81 \end{aligned}$$

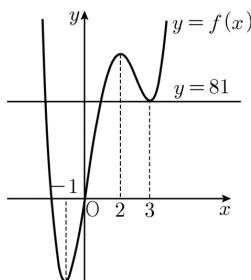
$$\therefore b = -1$$

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 72x \text{에서}$$

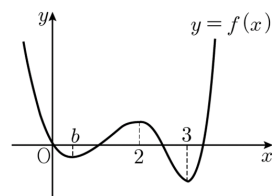
$$f(-1) = 3 + 16 + 6 - 72 = -47 < 81 \text{이므로}$$

조건을 만족시킨다.

$$\therefore f(1) = 3 - 16 + 6 + 72 = 65$$



(ii) $b < 2$ 이고 $f(3) < f(b)$ 인 경우

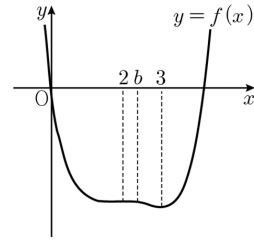


함수 $f(x)$ 는 $x = b$ 에서 극소이고 $f(0) = 0$ 이므로 $f(b) \leq 0$ 이다.

따라서 방정식 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은

0 또는 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $2 < b < 3$ 인 경우



함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소이고 $f(0) = 0$ 이므로 $f(2) < 0$ 이다.

따라서 방정식 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서

$$f(1) = 65$$

22 정답 31

해설 12 이하의 자연수 n 에 대하여 $n \neq 4, n \neq 9$ 이면

$$a_{n+1} = a_n + 2 \text{이므로}$$

$$a_n = a_{n+1} - 2$$

따라서 $a_{12} = 1$ 에서

$$a_{11} = a_{12} - 2 = -1, a_{10} = a_{11} - 2 = -3$$

(i) $a_9 > 0$ 일 때

$$2a_9 - \sqrt{9} \cdot a_{\sqrt{9}} = a_{10} = -3$$

$$\text{따라서 } a_9 = \frac{3}{2}a_3 - \frac{3}{2} \text{에서}$$

$$a_5 = \frac{3}{2}a_3 - \frac{19}{2}$$

(i-a) $a_4 > 0$ 일 때

$$a_5 = 2a_4 - \sqrt{4} \cdot a_{\sqrt{4}} \text{이므로}$$

$$2a_4 - 2a_2 = \frac{3}{2}a_3 - \frac{19}{2}$$

$$\text{즉, } a_4 = a_2 + \frac{3}{4}a_3 - \frac{19}{4}$$

따라서 $a_4 = a_3 + 2$ 에서

$$a_3 = a_2 + \frac{3}{4}a_3 - \frac{27}{4}$$

$$\therefore a_2 - \frac{1}{4}a_3 = \frac{27}{4}$$

이때 $a_3 = a_2 + 2$ 이므로

$$a_2 = \frac{29}{3}, a_3 = \frac{35}{3}$$

$$a_9 = \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{3} - \frac{3}{2} = 16 > 0,$$

$$a_4 = \frac{35}{3} + 2 = \frac{41}{3} > 0$$

$$\therefore a_1 = a_2 = -\frac{29}{3}$$

(i-b) $a_4 \leq 0$ 일 때

$$a_4 + 2 = a_5 = \frac{3}{2}a_3 - \frac{19}{2}$$

$$\text{따라서 } a_4 = \frac{3}{2}a_3 - \frac{23}{2} \text{에서}$$

$$a_3 + 2 = \frac{3}{2}a_3 - \frac{23}{2}$$

$$\therefore a_3 = 27$$

따라서 $a_4 = 27 + 2 = 29$ 이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_9 \leq 0$ 일 때

$$a_9 = a_{10} - 2 = -5 \text{에서 } a_5 = -13$$

(ii-a) $a_4 > 0$ 일 때

$$a_5 = 2a_4 - \sqrt{4} \cdot a_{\sqrt{4}} = 2a_4 - 2a_2$$

$$\text{즉, } a_4 = \frac{1}{2}a_5 + a_2 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_2 - \frac{13}{2}$$

$$\text{따라서 } a_3 = a_2 - \frac{17}{2} \text{이고}$$

$$a_3 = a_2 + 2 \text{이므로}$$

$$a_2 + 2 = a_2 - \frac{17}{2} \text{에서 모순이다.}$$

(ii-b) $a_4 \leq 0$ 일 때

$$a_5 = a_4 + 2 = -13$$

따라서 $a_4 = -15$ 에서

$$a_3 = -17, a_2 = -19$$

$$\therefore a_1 = -a_2 = 19$$

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 합은

$$-\frac{29}{3} + 19 = \frac{28}{3}$$

따라서 $p = 3, q = 28$ 이므로

$$p + q = 31$$

23 정답 ①

해설

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{5}\right)^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{25} \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{1}{9} - \left(\frac{3}{5}\right)^n} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{25} \cdot 0}{\frac{1}{9} - 0} = 9 \end{aligned}$$

24 정답 ③

해설

$3x \sin 4y - 2x = -2$ 에서

y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3 \sin 4y + 3x \cos 4y \cdot 4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 3 \sin 4y}{12x \cos 4y} \quad (\text{단, } 12x \cos 4y \neq 0)$$

따라서 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{2 - 3 \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{12 \cdot 1 \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)} &= \frac{2 - 3 \sin 2\pi}{12 \cos 2\pi} \\ &= \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

25 정답 ①

해설

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{7n^2 + 5}{3n^2 - 2n}\right) = 5 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{7n^2 + 5}{3n^2 - 2n}\right) = 0$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 5}{3n^2 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{5}{n^2}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{7}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{7n^2 + 5}{3n^2 - 2n}\right) + \frac{7n^2 + 5}{3n^2 - 2n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{7n^2 + 5}{3n^2 - 2n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 5}{3n^2 - 2n} \\ &= 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 3a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{7}{3} \\ &= \frac{49}{9} - 7 = -\frac{14}{9} \end{aligned}$$

26 정답 ①

해설 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$$P(2t, e^{6t} - 1), Q(f(t), 0)$$

이때 $\overline{PQ} - \overline{OQ} = 0$, 즉 $\overline{PQ} = \overline{OQ}$ 에서

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2 \text{이므로}$$

$$\{f(t) - 2t\}^2 + (e^{6t} - 1)^2 = \{f(t)\}^2$$

$$f(t) = t + \frac{(e^{6t} - 1)^2}{4t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{e^{6t} - 1}{t} \right)^2 \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{e^{6t} - 1}{6t} \cdot 6 \right)^2 \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot 6)^2 = 10 \end{aligned}$$

27 정답 ④

해설 $y = 2 \cdot a^x$ 에서 $y' = 2 \cdot a^x \ln a$

이때 점 $A(t, 2a^t)$ 에서의 접선 l 의 기울기는

$2a^t \ln a$ 이므로 직선 l 에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{2a^t \ln a}$$

따라서 점 A를 지나고 직선 l 에 수직인 직선의 방정식은

$$y - 2a^t = -\frac{1}{2a^t \ln a}(x - t)$$

이 식에 $y = 0$ 을 대입하면

$$-2a^t = -\frac{1}{2a^t \ln a}(x - t)$$

$$\therefore x = t + 4a^{2t} \ln a$$

따라서 점 B의 좌표는

$$B(t + 4a^{2t} \ln a, 0)$$

한편, 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HO}}{\overline{HB}} = \frac{t}{4a^{2t} \ln a}$$

$$\text{이때 } f(t) = \frac{t}{4a^{2t} \ln a} \text{라 하면}$$

$$f'(t) = \frac{4a^{2t} \ln a - t \cdot 4a^{2t} \cdot 2(\ln a)^2}{(4a^{2t} \ln a)^2}$$

$$= \frac{4a^{2t} \ln a (1 - 2t \ln a)}{(4a^{2t} \ln a)^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서}$$

$$1 - 2t \ln a = 0$$

따라서 $t = \frac{1}{2 \ln a}$ 이고, 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를

조사하면 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{1}{2 \ln a}$ 에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } \frac{1}{2 \ln a} = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$\ln a = 3, \text{ 즉 } a = e^3$$

28 정답 ④

해설 $h_1(x) = (x - a - 1)^2 e^x$,

$$h_2(x) = e^{2a}(x - a) + e^a \text{이라 하면}$$

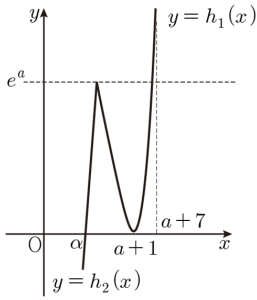
$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & (x \geq a) \\ h_2(x) & (x < a) \end{cases} \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= 2(x - a - 1)e^x + (x - a - 1)^2 e^x \\ &= (x - a - 1)(x - a + 1)e^x \end{aligned}$$

$$h_2'(x) = e^{2a}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} (x - a - 1)(x - a + 1)e^x & (x > a) \\ e^{2a} & (x < a) \end{cases}$$

이때 $f(a) = e^a$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 실수 t 에 대하여 $f(x) = t$ 를 만족시키는 x 의 최솟값이 $g(t)$ 이므로

$$t \leq e^a \text{ 일 때, } h_2(g(t)) = t$$

$$t > e^a \text{ 일 때, } h_1(g(t)) = t \text{가 성립한다.}$$

또한, 함수 $g(t)$ 는 $t = e^a$ 에서 불연속이므로

$$e^a = 4$$

$$t = f(a+1) = 0 < e^a \text{이므로}$$

$$h_2'(g(t)) \cdot g'(t) = 1 \text{에서}$$

$$h_2'(g(f(a+1))) \cdot g'(f(a+1)) = 1$$

직선 $y = h_2(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를

α ($\alpha < a$)라 하면 $g(0) = \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(f(a+1)) &= \frac{1}{h_2'(g(f(a+1)))} \\ &= \frac{1}{h_2'(\alpha)} = \frac{1}{e^{2a}} \end{aligned}$$

... ㉠

$$t = f(a+7) = 36e^{a+7} > e^a \text{이므로}$$

$$h_1'(g(t)) \cdot g'(t) = 1$$

$$h_1'(g(f(a+7))) \cdot g'(f(a+7)) = 1$$

$$\begin{aligned} g'(f(a+7)) &= \frac{1}{h_1'(g(f(a+7)))} \\ &= \frac{1}{h_1'(a+7)} = \frac{1}{6 \cdot 8 \cdot e^{a+7}} \\ &= \frac{1}{48e^{a+7}} \end{aligned}$$

... ㉡

㉠, ㉡에서 $e^a = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{g'(f(a+1))}{g'(f(a+7))} &= \frac{48e^{a+7}}{e^{2a}} = \frac{48e^7}{e^a} \\ &= \frac{48}{4}e^7 = 12e^7 \end{aligned}$$

$$\text{또한, } f''(x) = \frac{2x(x-2)(x^3+8x-8)}{(x^2+4)^2} \text{이고}$$

$$h(x) = x^3 + 8x - 8 \text{이라 하면}$$

$$h'(x) = 3x^2 + 8 > 0 \text{이므로 } h(x) = 0 \text{을 만족시키는}$$

$$x \text{의 값을 } \alpha \text{라 하면 } h(0) = -8, h(2) = 16 \text{이므로}$$

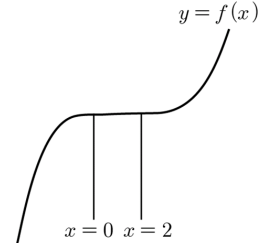
$$0 < \alpha < 2$$

따라서 변곡점은 $(0, f(0)), (\alpha, f(\alpha)), (2, f(2))$ 이고

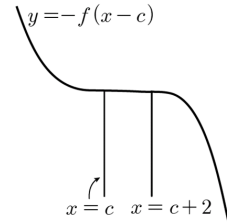
변곡점에서의 미분계수는

$$f'(0) = 0, f'(\alpha) > 0, f'(2) = 0$$

즉, 곡선 $y = f(x)$ 의 개형은 그림과 같다.



또한, 곡선 $y = -f(x-c)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를 x 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 곡선 $y = -f(x-c)$ 의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x = b$ 에서 연속이어야 한다.

이때 $a \geq 0$ 인 경우에 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow b-} g'(x) < 0, \lim_{x \rightarrow b+} g'(x) \geq 0 \text{이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 미분가능하지 않다.

$a < 0$ 인 경우

$$f(0) = 16\ln 2 + a, f'(0) = 0,$$

$$f(2) = -\frac{16}{3} + 24\ln 2 + a, f'(2) = 0 \text{이고}$$

$$x < b \text{에서 } \lim_{x \rightarrow b-} g'(x) \leq 0,$$

$$x \geq b \text{에서 } \lim_{x \rightarrow b+} g'(x) \geq 0 \text{이므로 } x = b \text{에서}$$

미분가능하려면

$$\lim_{x \rightarrow b-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow b+} g'(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow b} g'(x) = 0$$

29 정답 80

해설 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8\ln(x^2+4) + a$ 에서

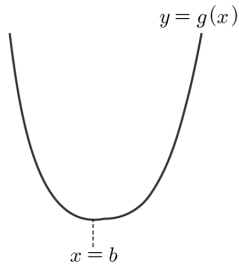
$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 4x + \frac{16x}{x^2+4} \\ &= \frac{x^2(x-2)^2}{x^2+4} \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 $|f(0)| = |f(2)|$, $b = 2$, $c = 2$ 이면
함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



$$\text{즉, } -16\ln 2 - a = -\frac{16}{3} + 24\ln 2 + a \text{에서}$$

$$a = \frac{8}{3} - 20\ln 2$$

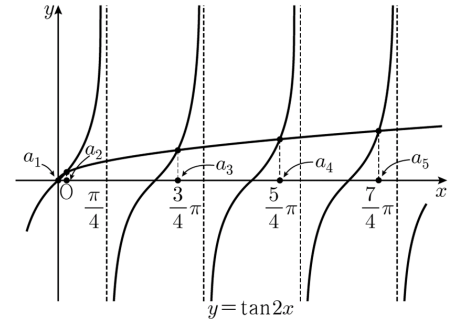
$$\begin{aligned} \therefore a + b + c &= \left(\frac{8}{3} - 20\ln 2\right) + 2 + 2 \\ &= \frac{20}{3} - 20\ln 2 \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{20}{3}$, $q = -20$ 이므로

$$\begin{aligned} 3(p - q) &= 3\left\{\frac{20}{3} - (-20)\right\} \\ &= 20 + 60 = 80 \end{aligned}$$

30 정답 1

해설 두 함수 $y = \frac{\sqrt{x}}{4}$, $y = \tan 2x$ 의 그래프와 수열 $\{a_n\}$ 을
좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이때 $\frac{\sqrt{a_n}}{4} = \tan 2a_n$ 이므로 삼각함수의 덧셈정리에

의하여

$$\begin{aligned} \tan(2a_{n+1} - 2a_n) &= \frac{\tan 2a_{n+1} - \tan 2a_n}{1 + \tan 2a_{n+1} \tan 2a_n} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{4} - \frac{\sqrt{a_n}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{a_n}}{4}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{4}}{\frac{16 + \sqrt{a_{n+1}a_n}}{16}} \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{16 + \sqrt{a_{n+1}a_n}} \\ &= \frac{4(a_{n+1} - a_n)}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})(16 + \sqrt{a_{n+1}a_n})} \\ \therefore \tan(2a_{n+1} - 2a_n) &= \frac{16(a_{n+1} - a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2(16 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2} \end{aligned}$$

한편, 곡선 $y = \tan 2x$ 의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2n-1}{4}\pi \quad (n \text{은 정수}) \text{이고}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 $\frac{\sqrt{a_n}}{4} \rightarrow \infty$ 이므로 위의 그래프에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n-3}{4}\pi\right) = 0$$

이때 $b_n = a_n - \frac{2n-3}{4}\pi$ 라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_{n+1} + \frac{2n-1}{4}\pi - b_n - \frac{2n-3}{4}\pi\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_{n+1} - b_n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 - 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} + \frac{2n-1}{4}\pi}{b_n + \frac{2n-3}{4}\pi} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{n} + \frac{2n-1}{4n}\pi}{\frac{b_n}{n} + \frac{2n-3}{4n}\pi} \\
 &= \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{0 + \frac{\pi}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2}{a_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} \right)^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} + \sqrt{\frac{a_n}{a_n}} \right)^2 \\
 &= (\sqrt{1} + \sqrt{1})^2 = 4
 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(16 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{a_n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16}{a_n} + \frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{a_n} \right)^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16}{a_n} + \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \right)^2 \\
 &= (0 + \sqrt{1})^2 = 1
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(2a_{n+1} - 2a_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16a_n^3(a_{n+1} - a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2(16 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16(a_{n+1} - a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2(16 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2} \cdot \frac{a_n^3}{a_n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16(a_{n+1} - a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})^2} \cdot \frac{(16 + \sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{a_n^2} \\
 &= \frac{16 \cdot \frac{\pi^2}{4}}{4 \cdot 1} = \pi^2 \\
 &\therefore \frac{1}{\pi^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(2a_{n+1} - 2a_n) = 1
 \end{aligned}$$