미적분 2024학년도 9월 모의고사 변형(2023년 시행)

고3 23년 9월

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 ______________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

| 지수법칙(3) : 지수가 실수일 때 | 정답률 82%

01

[2023년 9월 고3 1번 변형]

$2^{2-\sqrt{6}} \cdot 2^{2+\sqrt{6}}$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1
④ 4 ⑤ 16

| 미분계수를 이용한 극한값의 계산(2) : f(x)-f(a)/x-a 꼴의 극한 | 정답률 87%

02

[2023년 9월 고3 2번 변형]

함수 $f(x)=3x^2+2x$에 대하여 $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-1}{x+1}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

| 식의 값 구하기 (1) : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 | 정답률 79%

03

[2023년 9월 고3 3번 변형]

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

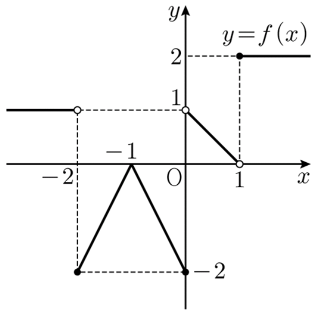
① $-\sqrt{7}$ ② $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\sqrt{7}$

| 함수의 우극한과 좌극한(2) : 그래프가 주어진 경우 | 정답률 86%

04

[2023년 9월 고3 4번 변형]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x\to0-} f(x) + \lim_{x\to1+} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

| 등비수열의 일반항 구하기(3) : a_i+a_j=k 형태(a_i와 a_j의 사칙연산 형태)로 주어진 경우 | 정답률 84%

05 [2023년 9월 고3 5번 변형]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\frac{a_3a_7}{a_6}=8$, $a_4+a_5=32$일 때, a_7의 값은?

① 198 ② 204 ③ 210 ④ 216 ⑤ 222

| 함수의 극대 · 극소를 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 90%

06 함수 $y=x^3+ax^2+bx-1$이 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가질 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② -2 ③ 4 ④ -6 ⑤ 9

| 조건을 이용하여 식의 값 구하기 | 정답률 71%

07 두 실수 a, b가 $ab=\log_3 11$, $b-a=\log_5 11$을 만족시킬 때, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$의 값은?

① $\log_5 2$ ② $\log_5 3$ ③ $\log_3 2$
④ $\log_3 5$ ⑤ $\log_2 5$

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : f'(x)로부터 f(x)구하기 | 정답률 76%

08 [2023년 9월 고3 8번 변형]
다항함수 $f(x)$가 $f'(x)=3x^2+4f(2)x$, $f(0)=2$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{5}{7}$
④ 1 ⑤ $\frac{9}{7}$

| 삼각함수가 포함된 부등식(1) : 일차식 꼴 | 정답률 59%

09 [2023년 9월 고3 9번 변형]

$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$ 일 때, 부등식 $\sin x \le \cos\frac{\pi}{5}$ 를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta - \alpha$의 값은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{8}{5}\pi$ ③ $\frac{17}{10}\pi$
④ $\frac{9}{5}\pi$ ⑤ $\frac{19}{10}\pi$

| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 | 정답률 64%

10 [2023년 9월 고3 10번 변형]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선이 점 $(2,\ 2)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은?

① 59 ② 61 ③ 63
④ 65 ⑤ 67

| 움직인 거리(1) : 직선 운동에서의 위치와 움직인 거리 | 정답률 56%

11 [2023년 9월 고3 11번 변형]

두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 $\mathrm{A}(2)$와 점 $\mathrm{B}(10)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도는 각각 $v_1(t)=3t^2-2t+3$, $v_2(t)=2t+1$이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 7이 될 때까지 점 P가 움직인 거리는?

① 3 ② 9 ③ 15
④ 21 ⑤ 27

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 56%

12 [2023년 9월 고3 12번 변형]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n-1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=16$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 39 ② 41 ③ 43
④ 45 ⑤ 47

| 삼차함수의 증가 · 감소의 조건(2) : 주어진 구간에서 | 정답률 49%

13 [2023년 9월 고3 13번 변형]

두 실수 a, b에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x^3+ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{2}{3}x^3-ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$ 이

구간 $(-\infty,\ -2]$에서 감소하고 구간 $[-2,\ \infty)$에서 증가할 때, $-2a+b$의 최댓값은?

① 6 ② 4 ③ 2
④ 0 ⑤ -2

| 지수함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 51%

14 [2023년 9월 고3 14번 변형]

두 자연수 a, b에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\leq -3) \\ -3^{x-2}+10 & (x>-3) \end{cases}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

> 집합 $\{f(x)\,|\,x\leq k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $2\leq k<3$이다.

① 10 ② 13 ③ 16
④ 19 ⑤ 22

| 함수가 불연속일 조건(2) : 다양한 형태의 함수가 불연속일 조건 | 정답률 53%

15 [2023년 9월 고3 15번 변형]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+2)\{f(x)-2\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 5 & (f(x)=0) \end{cases}$$이라 하자.

$\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)-2$일 때, $g(6)$의 값은?

① $\frac{445}{2}$　② 225　③ $\frac{455}{2}$　④ 230　⑤ $\frac{465}{2}$

| 로그의 진수에 미지수를 포함하는 방정식 : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | 정답률 84%

16 [2023년 9월 고3 16번 변형]

방정식 $\log_3(x-2)=\log_9(16-3x)$를 만족시키는
실수 x의 값을 구하시오.

| Σ의 성질 | 정답률 82%

17 [2023년 9월 고3 17번 변형]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{20}(a_k-2b_k)=16$, $\sum_{k=1}^{20}a_k=6$일 때, $\sum_{k=1}^{20}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오.

| 곱의 미분법(1) : y=f(x)g(x) 꼴 | 정답률 82%

18 [2023년 9월 고3 18번 변형]

함수 $f(x)=(x^2-2)(x^2+ax-1)$에 대하여 $f'(1)=18$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

| 두 곡선 사이의 넓이 | 정답률 74%

19 [2023년 9월 고3 19번 변형]

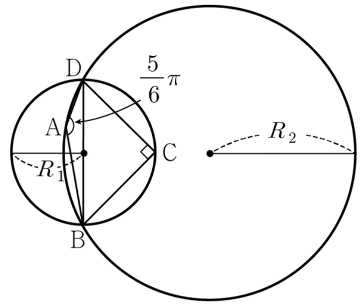
두 곡선 $y=2x^3-4x^2$과 $y=2x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

| 사인법칙과 코사인법칙 | 정답률 61%

20 [2023년 9월 고3 20번 변형]

아래 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{5}{6}\pi$, $\angle BCD=\frac{\pi}{2}$인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 R_1R_2의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
> $R_1=\boxed{(가)}\cdot\overline{BD}$
> 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $R_2=\overline{BD}$
> 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
> $\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\boxed{(나)})$이므로
> $R_1R_2=\boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $4p+q+2r$의 값을 구하시오.

| 자연수의 거듭제곱의 합(1) : 기본 공식을 이용하는 경우 | 정답률 51%

21 [2023년 9월 고3 21번 변형]

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_9가 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{9} S_k = 1140$일 때, a_3의 값을 구하시오.

| 정적분을 포함한 등식(2) : 적분구간에 변수가 있는 경우 | 정답률 52%

22 [2023년 9월 고3 22번 변형]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{-1}^{x} f(t)dt = xf(x) - x^2 - 3$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8$

$\int_{2}^{5} g(x)dx$의 값을 구하시오.

| 지수함수의 극한(1) : lim{x->0} e^x-1 /x 꼴의 극한 | 정답률 85%

23

[2023년 9월 고3 미적분 23번 변형]

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{8x}-1}{e^{3x}-1}$의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 | 정답률 78%

24

[2023년 9월 고3 미적분 24번 변형]

매개변수 t로 나타내어진

곡선 $x=t+\sin 2t$, $y=\cos^2 t$에서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때,

$\frac{dy}{dx}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

| 치환적분을 이용한 정적분(5) : 로그함수 | 정답률 73%

25 [2023년 9월 고3 미적분 25번 변형]

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x$에 대하여

$\int_1^e\left(2x+\frac{2}{x}\right)f(x)dx$의 값은?

① $\frac{e^4}{4}+e^2-\frac{1}{4}$ ② $\frac{e^4}{4}+e^2+\frac{1}{4}$
③ $\frac{e^4}{4}+e^2+\frac{3}{4}$ ④ $\frac{e^4}{2}+e^2+\frac{1}{4}$
⑤ $\frac{e^4}{2}+e^2+\frac{3}{4}$

| 급수의 성질 | 정답률 58%

26 [2023년 9월 고3 미적분 26번 변형]

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$a_1=b_1=1,\ a_2b_2=2$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=\frac{7}{3}$일

때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은?

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

| 곡선 y=f(x)의 길이 | 정답률 60%

27 [2023년 9월 고3 미적분 27번 변형]

$x=-\ln 2$에서 $x=1$까지의

곡선 $y=\frac{1}{4}\left(\left|e^{2x}-1\right|-e^{|2x|}+1\right)$의 길이는?

① $\frac{15}{8}$ ② $\frac{31}{16}$ ③ 2
④ $\frac{33}{16}$ ⑤ $\frac{17}{8}$

| 정적분으로 정의된 함수(2) : 적분 구간이 변수 | 정답률 38%

28 [2023년 9월 고3 미적분 28번 변형]

실수 a $(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\begin{cases} 3|\sin 6x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x\geq 0) \end{cases}$이라 하자.

함수 $g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$가 실수 전체의 집합에서

미분가능할 때, a의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

| 등비수열의 극한을 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 60%

29 [2023년 9월 고3 미적분 29번 변형]

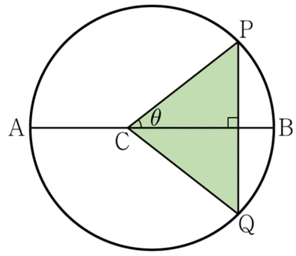
두 실수 a, b $(a>1,\ b>1)$이 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^n+a^{n+1}}{5^{n+1}+a^n}=a$,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\dfrac{25}{a}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

| 음함수의 미분법의 응용 | 정답률 45%

30 [2023년 9월 고3 미적분 30번 변형]

길이가 28인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $4S'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



미적분 2024학년도 9월 모의고사 변형(2023년 시행)

고3 23년 9월

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 ____________

01 정답 ⑤

해설 $2^{2-\sqrt{6}} \cdot 2^{2+\sqrt{6}} = 2^{(2-\sqrt{6})+(2+\sqrt{6})}$

$= 2^4 = 16$

02 정답 ①

해설 $f(x) = 3x^2 + 2x$에서

$f(-1) = 1,\ f'(x) = 6x + 2$

$\therefore \lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)-1}{x+1} = f'(-1) = -4$

03 정답 ⑤

해설 $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이고 $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= -\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}$

$= -\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{-\dfrac{\sqrt{14}}{4}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

$= \sqrt{7}$

04 정답 ③

해설 함수 $y = f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2,\ \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = (-2) + 2 = 0$

05 정답 ④

해설 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a > 0$, $r > 0$이다.

$\dfrac{a_3 a_7}{a_6} = 8$에서

$\dfrac{ar^2 \cdot ar^6}{ar^5} = 8$

$ar^3 = 8$, 즉 $a_4 = 8$

또, $a_4 + a_5 = 32$에서 $a_5 = 24$이므로

$r = \dfrac{a_5}{a_4} = \dfrac{24}{8} = 3$

따라서 $\dfrac{a_7}{a_4} = r^3 = 27$이므로

$a_7 = a_4 \cdot 27$

$= 8 \cdot 27 = 216$

06 정답 ④

해설 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$이라 하면

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

함수 $f(x)$가 $x = 1,\ x = 3$에서 극값을 가지므로

$f'(1) = 3 + 2a + b = 0$ $\cdots$ ㉠

$f'(3) = 27 + 6a + b = 0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -6,\ b = 9$

07 정답 ②

해설 $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} = \dfrac{\log_5 11}{\log_3 11}$

$= \dfrac{\log_{11} 3}{\log_{11} 5}$

$= \log_5 3$

08 정답 ①

해설 $f'(x)=3x^2+4f(2)x$에서

$f(x)=x^3+2f(2)x^2+C$ (C는 적분상수)라 하면

$f(0)=2$이므로

$C=2$

즉, $f(x)=x^3+2f(2)x^2+2$

이 식에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=8+8f(2)+2$

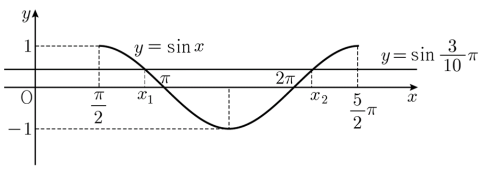
$\therefore f(2)=-\frac{10}{7}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{20}{7}x^2+2$이므로

$f(1)=1^3-\frac{20}{7}+2=\frac{1}{7}$

09 정답 ②

해설 $\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi$



그림과 같이 곡선 $y=\sin x\left(\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5\pi}{2}\right)$와

직선 $y=\sin\frac{3}{10}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각

x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하면

$x_1=\frac{7}{10}\pi$이고, $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로

$x_2=3\pi-x_1=\frac{23}{10}\pi$

따라서 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5\pi}{2}$일 때, 부등식 $\sin x\le\cos\frac{\pi}{5}$를

만족시키는 모든 x의 값의 범위는

$\frac{7}{10}\pi\le x\le\frac{23}{10}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{23}{10}\pi-\frac{7}{10}\pi=\frac{8}{5}\pi$

10 정답 ④

해설 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$f(x)-2=(x-a)(x-3)^2$

$f(x)=(x-a)(x-3)^2+2$ (단, a는 상수)

이때 $f'(x)=(x-3)^2+2(x-a)(x-3)$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

이 접선이 $(2,\ 2)$를 지나므로

$2-f(-1)=f'(-1)(2+1)$

$2-f(-1)=3f'(-1)$

$2-\{16(-1-a)+2\}=3\{16-8(-1-a)\}$

$2-(-14-16a)=3(24+8a)$

$16+16a=72+24a$

$8a=-56$

즉, $a=-7$이므로

$f(x)=(x+7)(x-3)^2+2$

$\therefore f(0)=7\cdot(-3)^2+2=65$

11 정답 ①

해설 점 P가 점 $\mathrm{A}(2)$에서 출발하고,
속도가 $v_1(t)=3t^2-2t+3$이므로
시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면

$$s_1(t)=2+\int_0^t(3t^2-2t+3)dt$$
$$=t^3-t^2+3t+2 \quad \cdots ㉠$$

또, 점 Q가 점 $\mathrm{B}(10)$에서 출발하고,
속도가 $v_2(t)=2t+1$이므로
시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면

$$s_2(t)=10+\int_0^t(2t+1)dt$$
$$=t^2+t+10 \quad \cdots ㉡$$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 7이 되는 시각은
$|s_1(t)-s_2(t)|=7$
㉠, ㉡에서
$|(t^3-t^2+3t+2)-(t^2+t+10)|=7$
$|t^3-2t^2+2t-8|=7$
따라서 $t^3-2t^2+2t-8=7$ 또는
$t^3-2t^2+2t-8=-7$
즉, $t^3-2t^2+2t-15=0$ 또는 $t^3-2t^2+2t-1=0$

(i) $t^3-2t^2+2t-15=0$일 때,
$(t-3)(t^2+t+5)=0$
$t>0$이므로
$t=3$

(ii) $t^3-2t^2+2t-1=0$일 때,
$(t-1)(t^2-t+1)=0$
$t>0$이므로
$t=1$

(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 7이 되는 시각은
$t=1$
따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=1$까지 움직인 거리는

$$\int_0^1|v_1(t)|dt=\int_0^1 v_1(t)dt$$
$$=\int_0^1(3t^2-2t+3)dt$$
$$=\Big[t^3-t^2+3t\Big]_0^1$$
$$=1-1+3=3$$

12 정답 ②

해설 자연수 k에 대하여

(i) $a_1=4k$일 때,
a_1은 짝수이므로
$$a_2=\frac{a_1}{2}-1=2k-1$$
a_2는 홀수이므로
$a_3=a_2+3=2k+2$
a_3은 짝수이므로
$$a_4=\frac{a_3}{2}-1=k$$
이때 $a_2+a_4=(2k-1)+k=3k-1$이므로
$3k-1=16$에서
$k=\frac{17}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_1=4k-1$일 때,
a_1은 홀수이므로
$a_2=a_1+3=4k+2$
a_2는 짝수이므로
$$a_3=\frac{a_2}{2}-1=2k$$
a_3도 짝수이므로
$$a_4=\frac{a_3}{2}-1=k-1$$
이때 $a_2+a_4=(4k+2)+(k-1)=5k+1$이므로
$5k+1=16$에서
$k=3$
$\therefore a_1=4k-1=11$

(iii) $a_1=4k-2$일 때,
a_1은 짝수이므로
$$a_2=\frac{a_1}{2}-1=2k-2$$
a_2도 짝수이므로
$$a_3=\frac{a_2}{2}-1=k-2$$

(a) k가 짝수이면
a_3이 짝수이므로
$$a_4=\frac{a_3}{2}-1=\frac{k}{2}-2$$
이때 $a_2+a_4=(2k-2)+\left(\frac{k}{2}-2\right)=\frac{5}{2}k-4$
이므로
$\frac{5}{2}k-4=16$에서
$k=8$
$\therefore a_1=4k-2=30$

(b) k가 홀수이면
a_3이 홀수이므로
$a_4=a_3+3=k+1$
이때
$a_2+a_4=(2k-2)+(k+1)=3k-1$이므로
$3k-1=16$에서
$k=\frac{17}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a_1=4k-3$일 때,
a_1은 홀수이므로
$a_2=a_1+3=4k$
a_2는 짝수이므로

$a_3 = \dfrac{a_2}{2} - 1 = 2k - 1$

a_3은 홀수이므로

$a_4 = a_3 + 3 = 2k + 2$

이때 $a_2 + a_4 = 4k + (2k+2) = 6k + 2$이므로

$6k + 2 = 16$에서

$k = \dfrac{7}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은

11, 30이므로 그 합은

$11 + 30 = 41$

13 정답 ②

해설 $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}x^3 + ax^2 - bx & (x < 0) \\ \dfrac{2}{3}x^3 - ax^2 - bx & (x \geq 0) \end{cases}$에서

$f'(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2ax - b & (x < 0) \\ 2x^2 - 2ax - b & (x > 0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x = -2$의 좌우에서 감소하다가 증가하고,

함수 $f(x)$가 $x = -2$에서 미분가능하므로

$f'(-2) = 0$

$-8 - 4a - b = 0$, $b = -4a - 8$

$x < 0$일 때,

$f'(x) = -2x^2 + 2ax + 4a + 8$

$= -2(x+2)(x-a-2)$

$f'(x) = 0$인 x의 값은 $x = -2$ 또는 $x = a+2$이다.

이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, -2]$에서 감소하고,

구간 $[-2, 0)$에서 증가하므로 $(-\infty, -2)$에서

$f'(x) \leq 0$, $(-2, 0)$에서 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

즉, $f'(a+2) = 0$에서 $a + 2 \geq 0$이어야 한다.

$\therefore a \geq -2$ $\cdots$ ㉠

한편, $x > 0$일 때

$f'(x) = 2x^2 - 2ax - b$

$= 2x^2 - 2ax + 4a + 8$

$= 2\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}a^2 + 4a + 8$

함수 $f(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 증가하므로 $(0, \infty)$에서

$f'(x) \geq 0$이어야 한다.

(ⅰ) $\dfrac{a}{2} < 0$, 즉 $a < 0$인 경우

$(0, \infty)$에서 $f'(x) \geq 0$이려면

$f'(0) = 4a + 8 \geq 0$이면 된다.

$\therefore -2 \leq a < 0$

(ⅱ) $\dfrac{a}{2} \geq 0$, 즉 $a \geq 0$인 경우

$(0, \infty)$에서 $f'(x) \geq 0$이려면

$f'\left(\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}a^2 + 4a + 8 \geq 0$이면 된다.

$a^2 - 8a - 16 \leq 0$

$(a - 4 - 4\sqrt{2})(a - 4 + 4\sqrt{2}) \leq 0$

$\therefore -4 + 4\sqrt{2} \leq a \leq 4 + 4\sqrt{2}$

이때 $a \geq 0$이므로

$0 \leq a \leq 4 + 4\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$-2 \leq a \leq 4 + 4\sqrt{2}$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $-2 \leq a \leq 4 + 4\sqrt{2}$이므로

$b = -4a - 8$에서

$-2a + b = -2a + (-4a - 8)$

$= -6a - 8$

이때 $-2a + b$, 즉 $-6a - 8$의 범위는

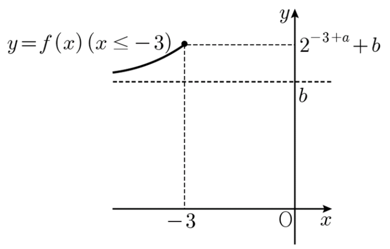
$-24 - 24\sqrt{2} \leq -6a \leq 12$

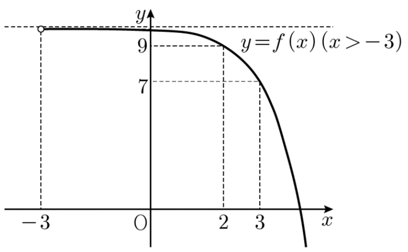
$\therefore -32 - 24\sqrt{2} \leq -6a - 8 \leq 4$

따라서 $-2a + b$의 최댓값은 4이다.

14 정답 ①

해설 $x \le -3$과 $x > -3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





또한, 주어진 조건에서 $2 \le k < 3$이므로 $x > -3$인 경우에 정수 $f(x)$는

$f(x)=8$ 또는 $f(x)=9$

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x \le -3$인 경우에 정수 $f(x)$는 8뿐이어야 한다.

즉, $b=7$이고 $f(-3)=8$이어야 하므로

$2^{-3+a}+7=8$

$2^{-3+a}=1$

$\therefore a=3$

따라서 $a=3$, $b=7$이므로

$a+b=10$

15 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)-2$이므로 $x=2$일 때, $f(2)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(2)\neq 0$일 때,

$x=2$에 가까운 x의 값에 대하여 $f(x)\neq 0$이므로

$$g(x)=\frac{f(x+2)\{f(x)-2\}}{f(x)}$$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)$, $f(x+2)$, $f(x)-2$는 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$

이 식을 $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)-2$에 대입하면 성립하지 않는다.

(ii) $f(2)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 $x=2$에 가까우며 $x\neq 2$인 x의 값에 대하여 $f(x)\neq 0$

이때 $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x+2)\{f(x)-2\}}{f(x)}$에서

$x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 2} f(x+2)\{f(x)-2\}=0$

$f(4)\{f(2)-2\}=0$

$\therefore f(4)=0$

$f(x)=(x-2)(x-4)(x-k)$ (k는 상수)

이 식을 $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x+2)\{f(x)-2\}}{f(x)}$에 대입하면

$$\lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+2-k)\{(x-2)(x-4)(x-k)-2\}}{(x-4)(x-k)}$$
$$=\frac{2(4-k)\cdot(-2)}{-2(2-k)}$$
$$=\frac{2(4-k)}{2-k}$$

이 값을 $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)-2$에 대입하면

$g(2)=5$이므로

$$\frac{2(4-k)}{2-k}=5-2$$

$8-2k=6-3k$

$\therefore k=-2$

따라서 $f(x)=(x+2)(x-2)(x-4)$이고,

$f(6)\neq 0$이므로

$$g(6)=\frac{f(8)\{f(6)-2\}}{f(6)}$$
$$=\frac{10\cdot 6\cdot 4\cdot(8\cdot 4\cdot 2-2)}{8\cdot 4\cdot 2}$$
$$=\frac{465}{2}$$

16 정답 4

해설 로그의 진수 조건에 의하여

$x-2>0$에서 $x>2$ $\cdots$ ㉠

$16-3x>0$에서 $x<\frac{16}{3}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2<x<\frac{16}{3}$

$\log_3(x-2)=\log_9(16-3x)$에서

$\log_3(x-2)=\frac{1}{2}\log_3(16-3x)$

$2\log_3(x-2)=\log_3(16-3x)$

$\log_3(x-2)^2=\log_3(16-3x)$

$(x-2)^2=16-3x$

$x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$

$2<x<\frac{16}{3}$이므로 $x=4$

17 정답 11

해설 $\sum_{k=1}^{20}(a_k-b_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\{(a_k-2b_k)+a_k\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(a_k-2b_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}a_k$

$=\frac{1}{2}\cdot 16+\frac{1}{2}\cdot 6=11$

18 정답 20

해설 $f(x)=(x^2-2)(x^2+ax-1)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax-1)+(x^2-2)(2x+a)$이므로

$f'(1)=2a-(a+2)$

$=a-2=18$

$\therefore a=20$

19 정답 29

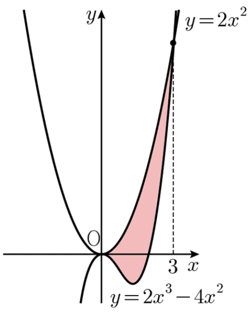
해설 두 곡선 $y=2x^3-4x^2$, $y=2x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$2x^3-4x^2=2x^2$

$2x^2(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이때 두 함수 $y=2x^3-4x^2$, $y=2x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_0^3\{2x^2-(2x^3-4x^2)\}dx$

$=\int_0^3(-2x^3+6x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^4+2x^3\right]_0^3$

$=\left(-\frac{81}{2}+54\right)-0$

$=\frac{27}{2}$

따라서 $p=2$, $q=27$이므로

$p+q=29$

20 정답 7

해설 $\angle BCD=\frac{\pi}{2}$에서 $\overline{BD}$는 삼각형 BCD의 외접원의 지름이므로

$R_1=\boxed{\frac{1}{2}}\cdot\overline{BD}$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{5}{6}\pi}=2R_2$, $\frac{\overline{BD}}{\frac{1}{2}}=2R_2$

$R_2=\overline{BD}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{5}{6}\pi$

$=2^2+1^2-\boxed{(-2\sqrt{3})}=5+2\sqrt{3}$

이므로

$R_1R_2=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BD}$

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}^2$

$=\boxed{\frac{5+2\sqrt{3}}{2}}$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=-2\sqrt{3}$, $r=\frac{5+2\sqrt{3}}{2}$이므로

$4p+q+2r=4\cdot\frac{1}{2}+(-2\sqrt{3})+2\cdot\frac{5+2\sqrt{3}}{2}$

$=2-2\sqrt{3}+(5+2\sqrt{3})$

$=7$

21 정답 22

해설 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$이므로

$\sum_{k=1}^{9}S_k=\sum_{k=1}^{9}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$

$=\frac{d}{2}\cdot\sum_{k=1}^{9}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\cdot\sum_{k=1}^{9}k$

$=\frac{d}{2}\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\cdot\frac{9\cdot10}{2}$

$=\frac{285}{2}d+45\left(a-\frac{d}{2}\right)$

$=45a+120d$

즉, $45a+120d=1140$에서

$3a+8d=76$ $\cdots$ ㉠

또, a_9가 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a+8d=13m$ $\cdots$ ㉡

$3\cdot$㉡$-$㉠에서 $16d=39m-76$

$16d+76+52=39m+52$

$16(d+8)=13(3m+4)$

$d+8=\dfrac{13(3m+4)}{16}$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $3m+4$의 값은 16의 배수이어야 한다.

즉, m이 될 수 있는 값은 $4,\ 20,\ 36,\ 52,\ \cdots$

한편, $d=\dfrac{39m-76}{16}$이므로 ㉡에서

$$\begin{aligned}a&=13m-8d\\&=13m-8\cdot\left(\frac{39m-76}{16}\right)\\&=13m-\frac{39}{2}m+38\\&=-\frac{13}{2}m+38\end{aligned}$$

이 값이 양수이어야 하므로

$-\dfrac{13}{2}m+38>0$

$\therefore\ m<\dfrac{76}{13}$

따라서 $m=4$이고 $d=5$이므로

$a=\dfrac{76-8d}{3}=12$

$\therefore\ a_3=a+2d=12+10=22$

22 정답 15

해설 조건 (가)에 $x=-1$을 대입하면

$0=-f(-1)-4$이므로

$f(-1)=-4$ $\cdots$ ㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=2$

즉, $f(x)=2x+C_1$ (C_1은 적분상수)로 놓을 수 있다.

이때 ㉠에서 $f(-1)=-4$이므로

$f(-1)=-2+C_1=-4$

$\therefore\ C_1=-2$

즉, $f(x)=2x-2$이므로

$F(x)=x^2-2x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$이므로

양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=x^4-4x^3+8x+C_3$ (C_3은 적분상수)로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=x^2-2x+C_2$이고

$G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)로 놓으면

$(x^2-2x+C_2)(x^2+ax+b)=x^4-4x^3+8x+C_3$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$a-2=-4$

즉, $a=-2$이므로

$G(x)=x^2-2x+b$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_2^5 g(x)dx&=\Big[G(x)\Big]_2^5\\&=G(5)-G(2)\\&=(5^2-2\cdot5+b)-(2^2-2\cdot2+b)\\&=15\end{aligned}$$

23 정답 ⑤

해설
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{8x}-1}{e^{3x}-1}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{8x}-1}{8x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\frac{8}{3}\right)\\&=\frac{8}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{8x}-1}{8x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{3x}-1}\\&=\frac{8}{3}\cdot1\cdot1=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

24 정답 ②

해설 $\dfrac{dx}{dt}=1+2\cos2t,\ \dfrac{dy}{dt}=-2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\sin t\cos t}{1+2\cos2t}\qquad\cdots\ ㉠$$

(단, $1+2\cos2t\neq0$)

㉠의 우변에 $t=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{-2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1+2\cos\frac{\pi}{2}}&=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{1+2\cdot0}\\&=\frac{-1}{1+0}=-1\end{aligned}$$

25 정답 ③

해설 $f'(x)=x+\dfrac{1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e\left(2x+\frac{2}{x}\right)f(x)dx&=\int_1^e 2f'(x)f(x)dx\\&=\Big[\{f(x)\}^2\Big]_1^e\\&=\{f(e)\}^2-\{f(1)\}^2\\&=\left(\frac{1}{2}e^2+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}+0\right)^2\\&=\frac{e^4}{4}+e^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

26 정답 ②

해설 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) \quad \cdots ㉠$$

이때 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn+1-d) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}} = 0$$

㉠에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}(1-0)=\frac{1}{d}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}}+b_n\right)=\frac{7}{3}$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}}+b_n = c_n$이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n = \frac{7}{3}$$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{d} \quad \cdots ㉡$$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 2$에서

$$r = \frac{2}{1+d}$$

이때 $d > 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \frac{b_1}{1-r}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{2}{1+d}}$$
$$=\frac{d+1}{d-1} \quad \cdots ㉢$$

이므로 ㉡, ㉢에서

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{d}=\frac{d+1}{d-1}$$
$$7d(d-1)-3(d-1)=3d(d+1)$$
$$4d^2-13d+3=0$$
$$(4d-1)(d-3)=0$$

이때 $d=\frac{1}{4}$이면 $r=\frac{8}{5}>1$이므로

$$d=3$$

따라서 ㉡ 또는 ㉢에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = 2$$

27 정답 ②

해설

$$y=\begin{cases}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}+\frac{1}{2} & (x<0)\\ 0 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}-\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} & (x<0)\\ 0 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이므로 $x<0$일 때

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)^2$$

에서

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)^2}$$
$$=\left|\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right| = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$

이고 $x \ge 0$일 때

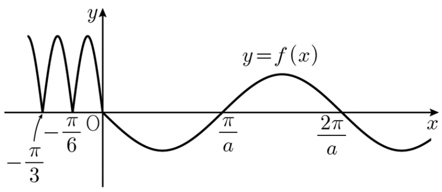
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+0 = 1$$

따라서 $-\ln 2 \le x \le 1$에서의 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln 2}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{-\ln 2}^{0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}dx+\int_{0}^{1}1dx$$
$$=\left[\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}\right]_{-\ln 2}^{0}+\Big[x\Big]_{0}^{1}$$
$$=\left(\frac{e^0-e^0}{4}-\frac{e^{-2\ln 2}-e^{2\ln 2}}{4}\right)+(1-0)$$
$$=\left(0-\frac{\frac{1}{4}-4}{4}\right)+1$$
$$=\frac{15}{16}+1=\frac{31}{16}$$

28 정답 ②

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$라 하자.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
이때 정적분의 성질에 의하여
$F'(x)=f(x)$이고

$$g(x)=\begin{cases} -F(x) & (F(x)<0) \\ F(x) & (F(x)\geq 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (F(x)<0) \\ f(x) & (F(x)>0) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)=|F(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$F(k)=0$인 실수 k가 존재하지 않거나 $F(k)=0$인 모든 실수 k에 대하여 $F'(k)=f(k)=0$이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 미분가능할 조건
$-a\pi<0$이고 모든 음의 실수 x에 대하여
$f(x)\geq 0$이므로
$F(k)=\int_{-a\pi}^{k} f(t)dt=0$인 음의 실수 k의 값은
$-a\pi$뿐이다.
이때 $f(k)=f(-a\pi)=3|\sin(-6a\pi)|=0$이어야 하므로

$-6a\pi=-n\pi$, 즉 $a=\dfrac{n}{6}$ (n은 자연수) $\cdots$ ㉠

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능할 조건

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} f(t)dt&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} (-3\sin 6t)dt\\&=\left[\frac{1}{2}\cos 6t\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\\&=\frac{1}{2}\cos 0-\frac{1}{2}\cos(-\pi)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

이고 모든 음의 실수 x에 대하여
$f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=f(x)$가 성립하므로 ㉠에서

$$\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=\int_{-\frac{n}{6}\pi}^{0} f(t)dt=n\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} f(t)dt=n$$

따라서 양의 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\\&=\int_{-\frac{n}{6}\pi}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt\\&=n+\int_{0}^{x}(-\sin at)dt\\&=n+\left[\frac{1}{a}\cos at\right]_{0}^{x}\\&=n+\left(\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos 0\right)\\&=n+\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\\&=n+\frac{6}{n}\cos\frac{n}{6}x-\frac{6}{n}\end{aligned}$$

이때 $F(k)=0$인 양수 k가 존재하면

$n=\dfrac{6}{n}\left(1-\cos\dfrac{n}{6}k\right)$에서

$\cos\dfrac{n}{6}k=1-\dfrac{n^2}{6}$ $\cdots$ ㉡

이때 $f(k)=-\sin ak=-\sin\dfrac{n}{6}k=0$이어야 하므로

$\dfrac{n}{6}k=m\pi$ (m은 자연수)에서

㉡에서 $\cos m\pi=1-\dfrac{n^2}{6}$

이때 m, n은 자연수이므로

$\cos m\pi=1-\dfrac{n^2}{6}=-1$, 즉 $n^2=12$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.
따라서 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$F(x)=n+\dfrac{6}{n}\cos\dfrac{n}{6}x-\dfrac{6}{n}>0$

즉, $\cos\dfrac{n}{6}x>1-\dfrac{n^2}{6}$이어야 한다.

따라서 $1-\dfrac{n^2}{6}<-1$이어야 하므로

$n^2>12$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이므로 ㉠에서 a의 최솟값은 $\dfrac{2}{3}$이다.

29 정답 50

해설 (ⅰ) $1<a<5$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{5}\right)^n=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+a^{n+1}}{5^{n+1}+a^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{5}\right)^n}{5+\left(\frac{a}{5}\right)^n}\\&=\frac{1+a\cdot 0}{5+0}=\frac{1}{5}=a\end{aligned}$$

$a=\dfrac{1}{5}<1$

이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=5$인 경우

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+a^{n+1}}{5^{n+1}+a^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+5^{n+1}}{5^{n+1}+5^n}\\&=\lim_{n\to\infty}1=1=a\end{aligned}$$

이므로 모순이다.

(ⅲ) $a>5$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{a}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+a^{n+1}}{5^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{a}\right)^n+a}{5\left(\frac{5}{a}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+a}{5\cdot 0+1}=a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(a) $5<a<b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=b>5=\frac{25}{5}>\frac{25}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(b) $5<b<a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{1}{a}\neq\frac{25}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(c) $5<a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{25}{a}$$

에서 $a=25$, $b=25$

따라서 $a=25$, $b=25$이므로

$a+b=50$

30 정답 450

해설 선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OP}=14$

$\overline{OC}=\overline{AO}-\overline{AC}=14-10=4$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{OP}^2=\overline{CP}^2+\overline{OC}^2-2\cdot\overline{CP}\cdot\overline{OC}\cdot\cos\theta$

$\overline{CP}=x$라 하면

$14^2=x^2+4^2-2\cdot x\cdot 4\cdot\cos\theta$

$x^2-8x\cos\theta-180=0$ $\cdots$ ㉠

$\theta=\frac{\pi}{6}$를 ㉠에 대입하면

$x^2-4\sqrt{3}x-180=0$

$x>0$이므로 $x=10\sqrt{3}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{d\theta}-8\cos\theta\frac{dx}{d\theta}+8x\sin\theta=0$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{4x\sin\theta}{4\cos\theta-x}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{4\cdot 10\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{4\cdot\cos\frac{\pi}{6}-10\sqrt{3}}=-\frac{5}{2}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{CM}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x\sin\theta\cdot x\cos\theta$$

$$=x^2\sin\theta\cos\theta$$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}=2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta+x^2\cos^2\theta-x^2\sin^2\theta$$

이 식에 $\theta=\frac{\pi}{6}$를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\cdot 10\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+(10\sqrt{3})^2\cos^2\frac{\pi}{6}-(10\sqrt{3})^2\sin^2\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{225}{2}$$

$$\therefore\ 4S'\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\cdot\frac{225}{2}=450$$