

미적분 2024학년도 6월 모의고사 (2023년 6월 시행)

고3 23년 6월

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을
입력해 보세요!



| 지수법칙(2) : 지수가 유리수일 때 | 정답률 90%

01

[2023년 6월 고3 1번 변형]

$\sqrt[3]{64} \cdot 9^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

| 미분계수를 이용하여 극한값 구하기 | 정답률 87%

02

[2023년 6월 고3 2번 변형]

함수 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

| Σ 의 성질 | 정답률 85%

03

[2023년 6월 고3 3번 변형]

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+4)=100$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{10}a_k$ 의 값은?

- ① 10
- ② 15
- ③ 20
- ④ 25
- ⑤ 30

| 연속함수의 성질 | 정답률 86%

04

[2023년 6월 고3 4번 변형]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 - f(2)$ 를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

| 곱의 미분법(1) : $y=f(x)g(x)$ 꼴 | 정답률 82%

05

[2023년 6월 고3 5번 변형]

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=(x^3+2)f(x)$ 라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=2$ 일 때, $g'(2)$ 의 값은?

- ① 30 ② 32 ③ 34
- ④ 36 ⑤ 38

| 식의 값 구하기 (1) : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 | 정답률 73%

06

[2023년 6월 고3 6번 변형]

$\cos\theta < 0$ 이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}\cos\theta$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은?

- ① $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{20}$ ③ 0
- ④ $\frac{\sqrt{10}}{20}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

| 로그함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 75%

07

[2023년 6월 고3 7번 변형]

상수 a ($a > 3$)에 대하여 함수 $y = \log_3(x - a)$ 의
그래프의 점근선이 두 곡선 $y = \log_3 \frac{x}{9}$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 와
만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = 2$ 일 때, a 의
값은?

① 6

② 9

③ 12

④ 15

⑤ 18

| 두 그래프의 교점의 개수 | 정답률 80%

08

[2023년 6월 고3 8번 변형]

두 곡선 $y = 4x^2 - 7$, $y = x^3 - 2x^2 + k$ 가 만나는
점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k 의 값은?

① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 25

| Σ 로 표현된 수열의 합과 일반항의 관계 | 정답률 72%

09

[2023년 6월 고3 9번 변형]

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)a_k} = n^2 + 4n$$
을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 값은?

① $\frac{1}{11}$

② $\frac{4}{33}$

③ $\frac{5}{33}$

④ $\frac{2}{11}$

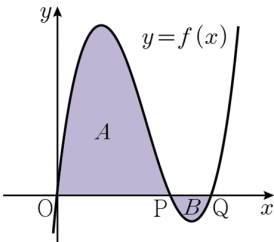
⑤ $\frac{7}{33}$

| 곡선과 x축 사이의 넓이 | 정답률 76%

10

[2023년 6월 고3 10번 변형]

양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=kx(x-3)(x-4)$ 이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 원점 O 와 두 점 P, Q ($\overline{OP}<\overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 $\overline{OP}$ 로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 $\overline{PQ}$ 로 둘러싸인 영역을 B 라 하자. $(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=8$ 일 때, k 의 값은?



- ① $\frac{3}{8}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{5}{8}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{7}{8}$

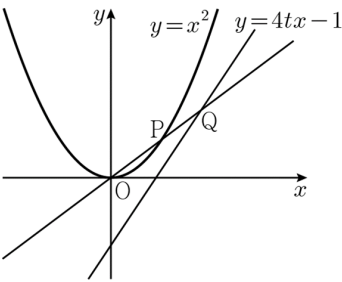
| 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리 | 정답률 58%

11

[2023년 6월 고3 11번 변형]

다음 그림과 같이 실수 t ($0 < t < \frac{1}{2}$)에 대하여
곡선 $y = x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y = 4tx - 1$ 과의
거리가 최소인 점을 P라 하고 직선 OP가
직선 $y = 4tx - 1$ 과 만나는 점을 Q라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}-} \frac{\overline{PQ}}{\frac{1}{2} - t}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ① $\sqrt{30}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{34}$
- ④ 6 ⑤ $\sqrt{38}$

| 조건을 만족시키는 등차수열의 항 구하기(3) : 이외의 조건이 주어진 경우 | 정답률 59%

12

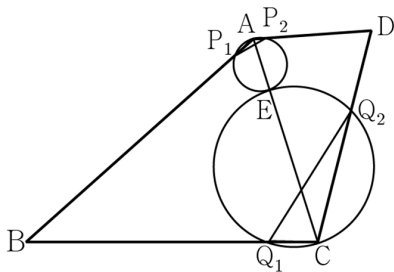
[2023년 6월 고3 12번 변형]

$a_2 = -12$ 이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = a_n + a_{n+1}$ ($n \geq 1$)이라 하고
두 집합 A, B 를 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$,
 $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ 이라 하자.
 $n(A \cap B) = 4$ 가 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 a_{30} 의 값의 합은?

- ① 260 ② 264 ③ 268
- ④ 272 ⑤ 276

| 삼각형의 넓이를 활용하는 문제 | 정답률 49%

- 13 [2023년 6월 고3 13번 변형]
- 다음 그림과 같이 $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=3$,
 $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{4}$, $\angle DAB > \frac{\pi}{2}$ 인
사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두
예각삼각형이다. 선분 AC를 1:3으로 내분하는 점 E에
대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB,
AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1 , P_2 라
하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC,
CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1 , Q_2 라
하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=4:5\sqrt{15}$ 이고 삼각형 ABD의
넓이가 2일 때, $(\overline{AB}+\overline{AD})^2$ 의 값은?
(단, $\overline{AB}>\overline{AD}$)



- ① 33

② $\frac{100}{3}$

③ $\frac{101}{3}$
- ④ 34

⑤ $\frac{103}{3}$

| 위치와 위치의 변화량 | 정답률 51%

- 14 [2023년 6월 고3 14번 변형]
- 실수 a ($a \geq 0$)에 대하여 수직선 위를 움직이는
점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 를
 $v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-3a)$ 라 하자.
점 P가 시각 $t=0$ 일 때 출발한 후 운동 방향을
한 번만 바꾸도록 하는 a 에 대하여 시각 $t=0$ 에서
 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은?

- ① $\frac{61}{20}$

② $\frac{63}{20}$

③ $\frac{13}{4}$
- ④ $\frac{67}{20}$

⑤ $\frac{69}{20}$

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 39%

15 [2023년 6월 고3 15번 변형]
자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$a_1 = 2k \text{이고, 모든 자연수 } n \text{에 대하여}$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3n - 2k & (a_n \leq 0) \\ a_n - 3n - 2k & (a_n > 0) \end{cases} \text{이다.}$$

$a_3 a_4 a_5 a_6 < 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 개수는?

- ① 4 ② 3 ③ 2
- ④ 1 ⑤ 0

| 지수에 미지수를 포함하는 부등식(1) : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | 정답률 84%

16 [2023년 6월 고3 16번 변형]
부등식 $3^{x-9} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^x$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오.

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : $f'(x)$ 로부터 $f(x)$ 구하기 | 정답률 89%

17

[2023년 6월 고3 17번 변형]

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=12x^3-1$ 이고 $f(0)=4$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

| 함수의 극대 · 극소를 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 80%

18

[2023년 6월 고3 18번 변형]

두 상수 a, b 에 대하여

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$ 는 $x=2$ 에서 극소이다.

함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -15 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값을 구하시오.

| 삼각함수의 미정계수의 결정(1) : 조건이 주어진 경우 | 정답률 61%

19 [2023년 6월 고3 19번 변형]
두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+12-a$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이다.
(나) $0\leq x<2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

| 정적분으로 정의된 함수의 최대 · 최소 | 정답률 51%

20 [2023년 6월 고3 20번 변형]
최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)=\int_0^xf(t)dt$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(14)$ 의 값을 구하시오.

- $x\geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\geq g(5)$ 이고 $|g(x)|\geq |g(4)|$ 이다.

| 로그함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 39%

21

[2023년 6월 고3 21번 변형]

실수 t 에 대하여 두 곡선 $y = 2t - 1 - \log_2 x$ 와 $y = 2^{x-t}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 $f(t)$ 라 하자. 보기의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C 의 값을 정할 때 $A + B + C$ 의 값을 구하시오. (단, $A + B + C \neq 0$)

- 명제 ㄱ이 참이면 $A = 100$, 거짓이면 $A = 0$ 이다.
 - 명제 ㄴ이 참이면 $B = 10$, 거짓이면 $B = 0$ 이다.
 - 명제 ㄷ이 참이면 $C = 1$, 거짓이면 $C = 0$ 이다.

- 〈보기〉
- ㄱ. $f(1) = 1$ 이고 $f(2) = 2$ 이다.
 - ㄴ. 실수 t 의 값이 증가하면 $f(t)$ 의 값도 증가한다.
 - ㄷ. 모든 양의 실수 t 에 대하여 $f(t) \geq t$ 이다.

| 삼차함수의 극값(3) : 주어진 구간에서 삼차함수가 극값을 가질 조건 | 정답률 39%

22

[2023년 6월 고3 22번 변형]

정수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = (x - 1)^2(x - 3a)$ 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 절댓값의 합이 3이 되도록 하는 a 에 대하여 $f'(3)$ 의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$)

- 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\left\{ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right\} \cdot \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \right\} < 0$ 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3 이 열린구간 $(k, k + 2)$ 에 존재한다.

| $\infty-\infty$ 꼴의 극한 | 정답률 90%

23

[2023년 6월 고3 미적분 23번 변형]

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-16n})$ 의 값은?

- ① $\frac{13}{2}$
- ② 7
- ③ $\frac{15}{2}$
- ④ 8
- ⑤ $\frac{17}{2}$

| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 | 정답률 81%

24

[2023년 6월 고3 미적분 24번 변형]

매개변수 t 로 나타내어진

곡선 $x = \frac{3t}{t^2+2}, y = \ln(t^2+2)$ 에서 $t = 1$ 일 때,

$\frac{dy}{dx}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

| 지수, 로그함수의 극한 응용(1) : 미정계수의 결정 | 정답률 74%

25

[2023년 6월 고3 미적분 25번 변형]

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{ax+b}-9}{3^{bx}-1} = 18$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

(단, a 와 b 는 0이 아닌 상수이다.)

- ① 4 ② 5 ③ 6
- ④ 7 ⑤ 8

| 방정식 $f(x)=k$ 가 실근을 가질 조건 | 정답률 73%

26

[2023년 6월 고3 미적분 26번 변형]

x 에 대한 방정식 $\frac{3}{2}x^2 - 10x + 3\ln x = t$ 의 서로 다른

실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t 의 값의 합은?

- ① $-\frac{59}{3}$ ② $-\frac{119}{6}$ ③ -20
- ④ $-\frac{121}{6}$ ⑤ $-\frac{61}{3}$

| 접선의 방정식(1) : 접점의 좌표가 주어진 경우 | **정답률 58%**

27

[2023년 6월 고3 미적분 27번 변형]

실수 $t \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$ 에 대하여 곡선 $y = \cos x$ 위의 점 $P(t, \cos t)$ 에서의 접선과 점 P 를 지나고 기울기가 1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2} - t \right)^2 \cdot \tan \theta$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

| 함수의 극대,극소를 이용한 미정계수의 결정 | **정답률 40%**

28

[2023년 6월 고3 미적분 28번 변형]

두 상수 $a \ (a > 0)$, b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, ab 의 값은?

(가) 모든 실수 x 에 대하여
$$\{f(x)\}^2 + 6f(x) = a \cos^3 2\pi x \cdot e^{\sin^2 2\pi x} + 2b$$

(나) $f(0) = f(1) + 2$

① $-\frac{15}{8}$

② $-\frac{17}{8}$

③ $-\frac{19}{8}$

④ $-\frac{21}{8}$

⑤ $-\frac{23}{8}$

| 음함수의 미분법의 응용 | 정답률 47%

29 [2023년 6월 고3 미적분 29번 변형]
세 실수 a, b, k 에 대하여 두 점 $A(2a, a+k), B(2b, b+k)$ 가 곡선 $C: x^2 - 4xy + 6y^2 = 10$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A 에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B 에서의 접선이 서로 수직일 때, $14k^2$ 의 값을 구하시오. (단, $a+2k \neq 0, b+2k \neq 0$)

| 합이 주어진 등비급수 | 정답률 37%

30 [2023년 6월 고3 미적분 30번 변형]
수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 을 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = \begin{cases} 1 & (a_n > 1) \\ a_n & (a_n \leq 1) \end{cases}$ 이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$ 은 수렴하고 그 합은 3이다.
- (나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 은 수렴하고 그 합은 -27 이다.

$b_3 = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 의 값을 구하시오.

미적분 2024학년도 6월 모의고사 (2023년 6월 시행)

고3 23년 6월

2024.08.27 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을
입력해 보세요!



01 정답 ④

해설 $\sqrt[3]{64} \cdot 9^{-\frac{1}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{-\frac{1}{2}}$
 $= 4 \cdot 3^{-1}$
 $= 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

02 정답 ⑤

해설 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 에서
 $f'(x) = 2x - 3$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$
 $= 2 \cdot 4 - 3 = 5$

03 정답 ③

해설 $\sum_{k=1}^{10} (3a_k + 4) = 3 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 4$
 $= 3 \sum_{k=1}^{10} a_k + 4 \cdot 10$
 $= 3 \sum_{k=1}^{10} a_k + 40$
이때 $3 \sum_{k=1}^{10} a_k + 40 = 100$ 이므로
 $3 \sum_{k=1}^{10} a_k = 60$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 20$

04 정답 ④

해설 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
 $x = 2$ 에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 - f(2)$ 에서
 $f(2) = 8 - f(2)$
 $2f(2) = 8$
 $\therefore f(2) = 4$

05 정답 ②

해설 $g(x) = (x^3 + 2)f(x)$ 이므로
 $g'(x) = 3x^2 f(x) + (x^3 + 2)f'(x)$
이때 $f(2) = 1, f'(2) = 2$ 이므로
 $g'(2) = 12f(2) + 10f'(2)$
 $= 12 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 32$

06 정답 ⑤

해설 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 이므로
 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3} \cos\theta$ 에서 $\cos\theta = -3\sin\theta$
이때 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로
 $\sin^2\theta + 9\sin^2\theta = 1$
 $\sin^2\theta = \frac{1}{10}$
또, $\cos\theta < 0$ 이므로
 $\sin\theta = -\frac{1}{3} \cos\theta > 0$
 $\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

07 정답 ②

해설 함수 $y = \log_3(x-a)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = a$ 이다.

곡선 $y = \log_3 \frac{x}{9}$ 와 직선 $x = a$ 가 만나는 점 A의 좌표는 $\left(a, \log_3 \frac{a}{9}\right)$

곡선 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 와 직선 $x = a$ 가 만나는 점 B의 좌표는 $\left(a, \log_{\frac{1}{3}} a\right)$

또, $a > 3$ 에서 $\log_3 \frac{a}{9} > \log_3 \frac{3}{9} = -1$,
 $\log_{\frac{1}{3}} a < \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ 이므로
 $\log_3 \frac{a}{9} > \log_{\frac{1}{3}} a$

이때
 $\overline{AB} = \log_3 \frac{a}{9} - \log_{\frac{1}{3}} a$
 $= (\log_3 a - 2) + \log_3 a = 2\log_3 a - 2$

이고 $\overline{AB} = 2$ 이므로
 $2\log_3 a - 2 = 2$
 $\log_3 a = 2$
 $\therefore a = 3^2 = 9$

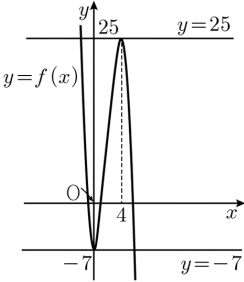
08 정답 ⑤

해설 두 곡선 $y = 4x^2 - 7$, $y = x^3 - 2x^2 + k$ 가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

방정식 $4x^2 - 7 = x^3 - 2x^2 + k$
즉, $-x^3 + 6x^2 - 7 = k \quad \dots \textcircled{1}$
이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면
곡선 $y = -x^3 + 6x^2 - 7$ 과 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7$ 이라 하면
 $f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x-4)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 4$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	4	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값 $f(0) = -7$ 을 갖고,
 $x = 4$ 에서 극댓값 $f(4) = 25$ 를 갖는다.
이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k 의 값은 25이다.

09 정답 ③

해설 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)a_k} = n^2 + 4n$ 에서
 $n=1$ 일 때
 $\frac{1}{3a_1} = 5$ 이므로
 $a_1 = \frac{1}{15}$
 $n \geq 2$ 일 때
 $\frac{1}{(2n+1)a_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)a_k}$
 $= n^2 + 4n - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\}$
 $= 2n+3$
 이므로 $(2n+1)a_n = \frac{1}{2n+3}$ 에서
 $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$
 이때 $n=1$ 일 때, $a_1 = \frac{1}{15}$ 이므로
 $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad (n \geq 1)$
 $\therefore \sum_{n=1}^{15} a_n$
 $= \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$
 $= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots \right.$
 $\left. + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{33} \right) \right\}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{33} \right)$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{33} = \frac{5}{33}$

10 정답 ④

해설 $f(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$ 이므로
 두 점 P, Q의 좌표는 각각 (3, 0), (4, 0)이다.
 이때 (A의 넓이) $= \int_0^3 f(x)dx$,
 (B의 넓이) $= \int_3^4 \{-f(x)\}dx$ 이므로
 (A의 넓이) - (B의 넓이)
 $= \int_0^3 f(x)dx - \int_3^4 \{-f(x)\}dx$
 $= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$
 $= \int_0^4 f(x)dx = 8$
 이어야 한다.
 이때
 $\int_0^4 f(x)dx = k \int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 12x)dx$
 $= k \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^4$
 $= k \left(64 - \frac{448}{3} + 96 \right) = \frac{32}{3}k$
 이므로 $\frac{32}{3}k = 8$
 $\therefore k = \frac{3}{4}$

11 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 (s, s^2) 이라 하면 점 P에서
 곡선 $y=x^2$ 에 접하는 직선이 기울기가 $4t$ 가 되어야
 한다.
 $f(x)=x^2$ 이라 하면
 $f'(x)=2x$ 이므로
 $2s=4t$ 에서 $s=2t$, 즉 $P(2t, 4t^2)$
 이때 직선 OP의 방정식은 $y=2tx$ 이므로
 $2tx=4tx-1$ 에서 $x=\frac{1}{2t}$
 즉, 점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{1}{2t}, 1\right)$
 $\therefore \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}-} \frac{\overline{PQ}}{\frac{1}{2}-t} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}-} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2t}-2t\right)^2 + (1-4t^2)^2}}{\frac{1}{2}-t}$
 $= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}-} 2 \cdot \frac{(1-4t^2)\sqrt{\frac{1}{4t^2}+1}}{1-2t}$
 $= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}-} 2(1+2t)\sqrt{\frac{1}{4t^2}+1}$
 $= 4\sqrt{2}$

12 정답 ④

해설 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)이라 하자.

$$b_n = a_n + a_{n+1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) \\ &= a_{n+2} - a_n = 2d \end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.

(i) $d > 0$ 일 때

$$a_1 = a_2 - d = -12 - d < 0$$

$$a_2 = -12 < 0 \text{ 이므로}$$

$$b_1 = a_1 + a_2 = -24 - d < a_1$$

$$n(A \cap B) = 4 \text{ 이려면}$$

$$b_2 = a_1 \text{ 또는 } b_3 = a_1 \text{ 또는 } b_4 = a_1 \text{ 이어야 한다.}$$

(a) $b_2 = a_1$ 일 때

$$b_3 = a_3, b_4 = a_5, b_5 = a_7 \text{ 이므로}$$

$$n(A \cap B) = 4$$

$$\text{또, } b_2 = b_1 + 2d = -24 + d \text{ 이므로}$$

$$b_2 = a_1 \text{ 에서 } -24 + d = -12 - d$$

$$2d = 12, d = 6$$

$$\therefore a_{30} = a_2 + 28d = -12 + 28 \cdot 6 = 156$$

(b) $b_3 = a_1$ 일 때

$$b_4 = a_3, b_5 = a_5, b_6 = a_7 \text{ 이므로}$$

$$n(A \cap B) = 4$$

$$\text{또, } b_3 = b_1 + 4d = -24 + 3d \text{ 이므로}$$

$$b_3 = a_1 \text{ 에서 } -24 + 3d = -12 - d$$

$$4d = 12, d = 3$$

$$\therefore a_{30} = a_2 + 28d = -12 + 28 \cdot 3 = 72$$

(c) $b_4 = a_1$ 일 때

$$b_5 = a_3, b_6 = a_5, b_7 = a_7 \text{ 이므로}$$

$$n(A \cap B) = 4$$

$$\text{또, } b_4 = b_1 + 6d = -24 + 5d \text{ 이므로}$$

$$b_4 = a_1 \text{ 에서 } -24 + 5d = -12 - d$$

$$6d = 12, d = 2$$

$$\therefore a_{30} = a_2 + 28d = -12 + 28 \cdot 2 = 44$$

(ii) $d < 0$ 일 때

(a) $a_1 > 0$ 이면 $a_2 < b_1 < a_1$ 이므로

$$n(A \cap B) = 0$$

(b) $a_1 = 0$ 이면 $b_1 = a_2, b_2 = a_4, b_3 = a_6$ 이므로

$$n(A \cap B) = 3$$

(c) $a_1 < 0$ 이면 $b_1 < a_2$ 이므로

$$n(A \cap B) \leq 3$$

(a), (b), (c)에서 $d < 0$ 이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.

(i), (ii)에서 $a_{30} = 156$ 또는 $a_{30} = 72$ 또는 $a_{30} = 44$

따라서 a_{30} 의 값의 합은

$$156 + 72 + 44 = 272$$

13 정답 ③

해설 $\angle BCD = \alpha, \angle DAB = \beta$ ($\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$),

$$\overline{AB} = a, \overline{AD} = b \text{ 라 하자.}$$

삼각형 BCD에서

$$\overline{BC} = 4, \overline{CD} = 3, \cos(\angle BCD) = -\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 31$$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = 31 \quad \dots \textcircled{1}$$

또, 점 E가 선분 AC를 1:3으로 내분하는 점이므로

두 삼각형 $\triangle AP_1P_2, \triangle CQ_1Q_2$ 의 외접원의 반지름의

길이를 각각 $r, 3r$ 로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin \beta} = r, \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin \alpha} = 3r \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha : \sin \beta &= \frac{\overline{Q_1Q_2}}{3r} : \frac{\overline{P_1P_2}}{r} \\ &= \frac{5\sqrt{15}}{3} : 4 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sin \beta = \frac{12 \sin \alpha}{5 \sqrt{15}}$$

$$\text{이때 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sin \beta = \frac{12}{5 \sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3}{5}$$

$\cos \beta < 0$ 이므로

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

$$= -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} ab \sin \beta = 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{2} ab \cdot \frac{3}{5} = 2, ab = \frac{20}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{20}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 31$$

$$a^2 + b^2 = \frac{61}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &= \frac{61}{3} + 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{101}{3} \end{aligned}$$

14 정답 ②

해설 $a \neq 0, a \neq \frac{1}{3}, a \neq 1$ 이면 점 P는 출발 후 운동

방향을 세 번 바꾼다.

따라서 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=0$ 일 때

$$v(t)=-t^3(t-1)$$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$ 에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_0^3 -t^3(t-1)dt &= \int_0^3 (-t^4+t^3)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^3 \\ &= -\frac{243}{5}+\frac{81}{4}=-\frac{567}{20}\end{aligned}$$

(ii) $a=\frac{1}{3}$ 일 때

$$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-1)^2$$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\frac{1}{3}$ 에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_0^3 -t\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-1)^2dt &= \int_0^3 -\left(t^2-\frac{1}{3}t\right)(t^2-2t+1)dt \\ &= \int_0^3 \left(-t^4+\frac{7}{3}t^3-\frac{5}{3}t^2+\frac{1}{3}t\right)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{7}{12}t^4-\frac{5}{9}t^3+\frac{1}{6}t^2\right]_0^3 \\ &= -\frac{243}{5}+\frac{189}{4}-15+\frac{3}{2} \\ &= \frac{(-972)+945+(-300)+30}{20}=-\frac{297}{20}\end{aligned}$$

(iii) $a=1$ 일 때

$$v(t)=-t(t-1)^2(t-3)$$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=3$ 에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_0^3 -t(t-1)^2(t-3)dt &= \int_0^3 -t(t^2-2t+1)(t-3)dt \\ &= \int_0^3 (-t^4+5t^3-7t^2+3t)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{4}t^4-\frac{7}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3 \\ &= -\frac{243}{5}+\frac{405}{4}-63+\frac{27}{2} \\ &= \frac{(-972)+2025+(-1260)+270}{20}=\frac{63}{20}\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의

최댓값은 $\frac{63}{20}$ 이다.

15 정답 ④

해설 $a_3a_4a_5a_6 < 0$ 이므로 a_3, a_4, a_5, a_6 은 어느 것도 0이 될 수 없다.

$$a_1 = 2k > 0 \text{이므로}$$

$$a_2 = a_1 - 3 - 2k = -3 < 0$$

$$a_3 = a_2 + 6 - 2k = 3 - 2k$$

(i) $a_3 = 3 - 2k > 0$ 인 경우

$$3 - 2k > 0 \text{에서 } k < \frac{3}{2}, \text{ 즉 } k = 1 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_3 - 9 - 2k = -10 < 0$$

$$a_5 = a_4 + 12 - 2k = 0$$

이때 a_3, a_4, a_5, a_6 은 어느 것도 0이 될 수 없으므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a_3 = 3 - 2k < 0$ 인 경우

$$\text{즉, } k > \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$a_4 = a_3 + 9 - 2k = 12 - 4k$$

(a) $a_4 = 12 - 4k > 0$ 인 경우

$$\text{즉, } k < 3 \text{이므로 } \frac{3}{2} < k < 3 \text{에서 } k = 2 \text{일 때}$$

$$a_4 = 12 - 8 = 4$$

$$a_5 = a_4 - 12 - 2k = -12 < 0$$

$$a_6 = a_5 + 15 - 2k = -1 < 0$$

따라서 $a_3a_4a_5a_6 < 0$ 이므로

주어진 조건을 만족시킨다.

(b) $a_4 = 12 - 4k < 0$ 인 경우

$$\text{즉, } k > 3 \text{이므로}$$

$$a_5 = a_4 + 12 - 2k = 24 - 6k$$

(ㄱ) $a_5 = 24 - 6k > 0$ 인 경우

$$\text{즉, } k < 4 \text{에서 } 3 < k < 4 \text{이므로}$$

$$3 < k < 4 \text{를 만족하는 자연수 } k \text{는}$$

존재하지 않는다.

(ㄴ) $a_5 = 24 - 6k < 0$ 인 경우

$$\text{즉, } k > 4 \text{이므로 } k \geq 5 \text{인 경우이다.}$$

$$\text{이때 } a_6 = a_5 + 15 - 2k = 39 - 8k \text{이고}$$

$$a_3a_4a_5a_6 < 0 \text{이기 위해서는}$$

$$a_6 > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a_6 = 39 - 8k > 0$$

$$\therefore k < \frac{39}{8}$$

조건을 만족하는 k 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 k 는 2의 1개이다.

16

정답 6

해설 $\left(\frac{1}{9}\right)^x = (3^{-2})^x = 3^{-2x}$ 이므로 주어진 부등식은 $3^{x-9} \leq 3^{-2x}$
양변의 밑 3이 1보다 크므로 $x-9 \leq -2x$
 $3x \leq 9$
 $\therefore x \leq 3$
따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 $1+2+3=6$

17

정답 50

해설 $f(x) = \int f'(x)dx$
 $= \int (12x^3 - 1)dx$
 $= 3x^4 - x + C$ (C 는 적분상수)
 $f(0) = 4$ 이므로 $C = 4$
따라서 $f(x) = 3x^4 - x + 4$ 이므로
 $f(2) = 48 - 2 + 4 = 50$

18

정답 17

해설 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극솟값 -15 를 가지므로 $f(2) = -15$ 에서 $8a + 2b + a = -15$
 $9a + 2b = -15 \quad \cdots \textcircled{A}$
또, $f'(x) = 3ax^2 + b$ 이고 $f'(2) = 0$ 이어야 하므로 $12a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 과 $\textcircled{B}$ 을 연립하면 $a = 1, b = -12$
따라서 $f(x) = x^3 - 12x + 1$ 이고 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$
이때 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 2$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 17 을 갖는다.

19

정답 12

해설 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $-a + 12 - a = 12 - 2a$ 이므로 조건 (가)를 만족시키려면 $12 - 2a \geq 0$
즉, $a \leq 6$ 이어야 한다.
 $a = 1$ 또는 $a = 2$ 또는 $a = 3$ 또는 $a = 4$ 또는 $a = 5$ 일 때는 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.
 $\therefore a = 6$
이때 $f(x) = 6\sin bx + 6$ 이고
이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이므로 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$ 일 때
방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 6이 되려면 $\frac{23\pi}{2b} < 2\pi \leq \frac{27\pi}{2b}$ 이어야 한다.
즉, $\frac{23}{4} < b \leq \frac{27}{4}$ 이고 b 는 자연수이므로 $b = 6$
 $\therefore a + b = 12$

20 정답 336

해설 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$F'(x) = f(x) \text{ 이고}$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = f(x)$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

조건에서 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq g(5)$ 이므로 삼차함수 $g(x)$ 는 구간 $[1, \infty)$ 에서 $x = 5$ 일 때 최소이자 극소이다. ... ㉠

$$\text{즉, } g'(5) = f(5) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = 3(x-5)(x-a) \quad (a \text{는 상수}) \quad \dots \text{㉡}$$

로 놓을 수 있다.

(i) $g(5) \geq 0$ 인 경우

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \geq g(5) \geq 0 \text{ 이므로 이 범위에서}$$

$$|g(x)| = g(x)$$

조건에서 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$|g(x)| \geq |g(4)|$$

$$\text{즉, } g(x) \geq g(4) \text{ 이어야 한다.} \quad \dots \text{㉢}$$

이때 ㉠에서 $g(4) > g(5)$ 이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(5) < 0$ 인 경우

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$|g(x)| \geq |g(4)| \text{ 이려면 } g(4) = 0 \quad \dots \text{㉣}$$

이어야 한다.

$$\text{㉣에서 } f(x) = 3x^2 - 3(a+5)x + 15a \text{ 이므로}$$

$$F(x) = x^3 - \frac{3}{2}(a+5)x^2 + 15ax + C$$

(단, C 는 적분상수)

따라서

$$g(x) = F(x) - F(0) = x^3 - \frac{3}{2}(a+5)x^2 + 15ax$$

$$\text{㉣에서 } g(4) = 64 - 24(a+5) + 60a = 0$$

$$36a = 56$$

$$\therefore a = \frac{14}{9}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3(x-5)\left(x - \frac{14}{9}\right) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(14) &= 3(14-5)\left(14 - \frac{14}{9}\right) \\ &= 27 \cdot \frac{112}{9} = 336 \end{aligned}$$

21 정답 10

해설 ㄱ. 곡선 $y = 2t - 1 - \log_2 x$ 는 곡선 $y = \log_2 x$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 $2t-1$ 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

또, 곡선 $y = 2^{x-t}$ 은 곡선 $y = 2^x$ 을 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 두 곡선 $y = 2t - 1 - \log_2 x$, $y = 2^{x-t}$ 은 한 점에서 만난다.

$t = 1$ 일 때, 곡선 $y = 1 - \log_2 x$ 는 $x = 1$ 일 때 $y = 1$ 이므로 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

또, 곡선 $y = 2^{x-1}$ 은 $x = 1$ 일 때 $y = 1$ 이므로 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

$$\therefore f(1) = 1$$

$t = 2$ 일 때, 곡선 $y = 3 - \log_2 x$ 는 $x = 2$ 일 때, $y = 2$ 이므로 점 $(2, 2)$ 을 지난다.

또, 곡선 $y = 2^{x-2}$ 은 $x = 2$ 일 때, $y = 1$ 이므로 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

$$\therefore f(2) \neq 2$$

따라서 이 명제는 거짓이므로

$$A = 0$$

ㄴ. 곡선 $y = 2t - 1 - \log_2 x$ 는 곡선 $y = -\log_2 x$ 를 y 축의 방향으로 $2t-1$ 만큼 평행이동한 것이다. 이때 t 의 값이 증가하면 두 곡선 $y = 2t - 1 - \log_2 x$, $y = 2^x$ 의 교점의 x 좌표는 증가한다.

이때 곡선 $y = 2^{x-t}$ 은 곡선 $y = 2^x$ 을 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이므로

t 의 값이 증가하면 두 곡선 $y = 2t - 1 - \log_2 x$, $y = 2^{x-t}$ 의 교점의 x 좌표는

두 곡선 $y = 2t - 1 - \log_2 x$, $y = 2^x$ 의 교점의 x 좌표보다 커진다.

따라서 t 의 값이 증가하면 $f(t)$ 의 값도 증가한다.

즉, 이 명제가 참이므로

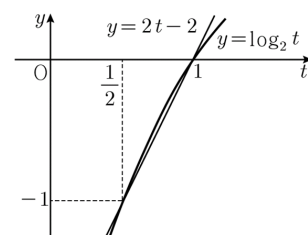
$$B = 10$$

ㄷ. $g(x) = 2t - 1 - \log_2 x$, $h(x) = 2^{x-t}$ 이라 하면 함수 $y = g(x)$ 는 감소함수이고, 함수 $y = h(x)$ 는 증가함수이므로 $f(t) \geq t$ 이기 위해서는 $g(t) \geq h(t)$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 2t - 1 - \log_2 t \geq 2^{t-t}$$

$$2t - 2 \geq \log_2 t \quad \dots \text{㉠}$$

이때 두 함수 $y = \log_2 t$, $y = 2t - 2$ 의 그래프는 두 점 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $(1, 0)$ 에서 만나고 다음 그림과 같다.



위에서 $\frac{1}{2} < t < 1$ 일 때는 함수 $y = \log_2 t$ 의

그래프가 직선 $y = 2t - 2$ 보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

즉, $\frac{1}{2} < t < 1$ 일 때는 부등식 $f(t) \geq t$ 를

만족시키지 못한다.
 이 명제가 거짓이므로 $C=0$
 따라서 $A=0, B=10, C=0$ 이므로
 $A+B+C=10$

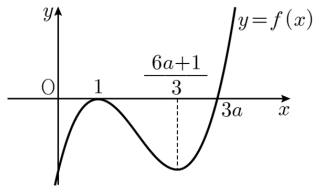
22 정답 4

해설 주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $(k, k+2)$ 에 두 점 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ 을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3 이 존재해야 하므로 극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $(k, k+2)$ 에 존재해야 한다.

$$\begin{aligned} \text{이때 } f(x) &= (x-1)^2(x-3a) \text{에서} \\ f'(x) &= 2(x-1)(x-3a) + (x-1)^2 \\ &= (x-1)(3x-6a-1) \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 a 의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\frac{6a+1}{3} > 1$, 즉 $a > \frac{1}{3}$ 일 때



$k=0$ 일 때 $x=1$ 이 구간 $(0, 2)$ 에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x = \frac{6a+1}{3}$ 이 구간 $(k, k+2)$ 에 존재하려면

$$k < \frac{6a+1}{3} < k+2 \text{이므로}$$

$$\frac{6a-5}{3} < k < \frac{6a+1}{3} \text{이어야 한다.}$$

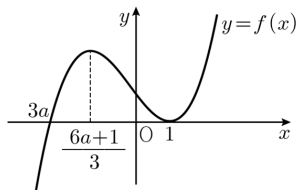
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 절댓값의 합이 3이 되려면 이 구간에 $k=1, k=2$ 가 반드시 존재해야 하므로

$$\frac{6a-5}{3} < 1, \frac{6a+1}{3} > 2$$

$$\frac{5}{6} < a < \frac{4}{3}$$

$$\therefore a=1$$

(ii) $\frac{6a+1}{3} < 1$, 즉 $a < \frac{1}{3}$ 일 때



$k=0$ 일 때 $x=1$ 이 구간 $(0, 2)$ 에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x = \frac{6a+1}{3}$ 이 구간 $(k, k+2)$ 에 존재하려면

$$k < \frac{6a+1}{3} < k+2 \text{이므로}$$

$$k < \frac{6a+1}{3} < k+2 \text{이므로}$$

$$\frac{6a-5}{3} < k < \frac{6a+1}{3} \text{이어야 한다.}$$

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 합이 3이 되려면 이 구간에 $k=-2, k=-1$ 이 반드시 존재해야 하므로

$$\frac{6a-5}{3} < -2, \frac{6a+1}{3} > -1$$

$$-\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{6}$$

이때 이 부등식을 만족시키는 정수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=1$ 이므로

$$f(x) = (x-1)^2(x-3)$$

$$\text{따라서 } f'(x) = (x-1)(3x-7) \text{이므로}$$

$$f'(3) = 4$$

23

정답 ⑤

해설 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-16n})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-16n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{16}{n}}} \\ &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$

24

정답 ②

해설 $\frac{dx}{dt} = \frac{3(t^2+2)-3t \cdot 2t}{(t^2+2)^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{-3t^2+6}{(t^2+2)^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t^2+2} \cdot 2t \\ &= \frac{2t}{t^2+2} \end{aligned}$$

이때 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{2t}{t^2+2}}{\frac{-3t^2+6}{(t^2+2)^2}} \\ &= \frac{2t(t^2+2)}{-3t^2+6} \end{aligned}$$

따라서 $t=1$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot (1^2+2)}{-3 \cdot 1^2+6} = \frac{6}{3} = 2$$

25

정답 ③

해설 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{ax+b}-9}{3^{bx}-1} = 18$ 에서

$x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

이때 함수 $y = 3^{ax+b} - 9$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^{ax+b} - 9) = 3^b - 9 = 0, \quad 3^b = 9$$
$$\therefore b = 2$$

따라서 주어진 식에 $b=2$ 를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{ax+2}-9}{3^{2x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9(3^{ax}-1)}{3^{2x}-1} \\ &= \frac{9a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3^{ax}-1}{ax}}{\frac{3^{2x}-1}{2x}} \\ &= \frac{9a}{2} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 3} = \frac{9a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{9a}{2} = 18$ 에서

$$a = 4$$
$$\therefore a+b = 4+2 = 6$$

26 정답 ①

해설 $\frac{3}{2}x^2 - 10x + 3\ln x = t$ 에서

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 10x + 3\ln x \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x - 10 + \frac{3}{x} \\ &= \frac{3x^2 - 10x + 3}{x} \\ &= \frac{(3x-1)(x-3)}{x} \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)		$\frac{1}{3}$		3	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

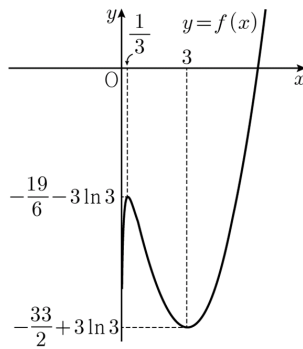
이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{3} + 3\ln \frac{1}{3} \\ &= -\frac{19}{6} - 3\ln 3 \end{aligned}$$

또 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{3}{2} \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 3\ln 3 \\ &= -\frac{33}{2} + 3\ln 3 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 x 에 대한 방정식 $\frac{3}{2}x^2 - 10x + 3\ln x = t$ 의 서로

다른 실근의 개수가 2가 되기 위해서는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$$t = -\frac{19}{6} - 3\ln 3 \text{ 또는 } t = -\frac{33}{2} + 3\ln 3$$

따라서 모든 실수 t 의 값의 합은

$$\left(-\frac{19}{6} - 3\ln 3\right) + \left(-\frac{33}{2} + 3\ln 3\right) = -\frac{59}{3}$$

27 정답 ④

해설 $y = \cos x$ 에서 $y' = -\sin x$ 이므로 곡선 $y = \cos x$ 위의 점 $P(t, \cos t)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\sin t$ 이다.

따라서 점 P 에서의 접선과 점 P 를 지나고 기울기가 1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left| \frac{-\sin t - 1}{1 + (-\sin t) \cdot 1} \right| \\ &= \left| \frac{\sin t + 1}{1 - \sin t} \right| \end{aligned}$$

이때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\sin t + 1}{1 - \sin t}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 \cdot \tan \theta$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 \cdot \frac{\sin t + 1}{1 - \sin t}$$

이때 $\frac{\pi}{2} - t = x$ 라 하면 $t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ 일 때 $x \rightarrow 0^+$ 이고

$$\sin t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 \cdot \tan \theta$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 (\sin t + 1)}{1 - \sin t}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 (1 + \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 (1 + \cos x)^2}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot (1 + \cos x)^2 \right\}$$

$$= 1^2 \cdot 2^2 = 4$$

28 정답 ②

해설 조건 (가)에서 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$\{f(0)\}^2 + 6f(0) = a + 2b \quad \dots \textcircled{㉠}$$

또, 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$\{f(1)\}^2 + 6f(1) = a + 2b \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\{f(0)\}^2 + 6f(0) = \{f(1)\}^2 + 6f(1)$$

$$\{f(1) - f(0)\} \{f(1) + f(0) + 6\} = 0$$

$$\therefore f(2) = f(1) \text{ 또는 } f(2) + f(1) + 6 = 0$$

이때 $f(2) = f(1)$ 이면 조건 (나)를 만족시키지

못하므로

$$f(1) + f(0) + 6 = 0 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

조건 (나)에서 $f(0) = f(1) + 2$ 를 ㉔에 대입하면

$$2f(1) + 8 = 0$$

$$f(1) = -4$$

또, 조건 (나)에서

$$f(0) = f(1) + 2 = -4 + 2 = -2$$

$f(0) = -2$ 를 ㉔에 대입하면

$$(-2)^2 + 6 \cdot (-2) = a + 2b$$

$$a + 2b = -8$$

... ㉔

한편, 조건 (가)에서 양변에 9를 더하면

$$\{f(x)\}^2 + 6f(x) + 9 = a \cos^3 2\pi x \cdot e^{\sin^2 2\pi x} + 2b + 9$$

$$\{f(x) + 3\}^2 = a \cos^3 2\pi x \cdot e^{\sin^2 2\pi x} + 2b + 9$$

이때 $g(x) = a \cos^3 2\pi x \cdot e^{\sin^2 2\pi x} + 2b + 9$ 라 하면

$$\{f(x) + 3\}^2 = g(x)$$

... ㉔

에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이므로

$$f(x) = -3 \pm \sqrt{g(x)}$$

이때 $f(0) = -2 > -3$, $f(1) = -4 < -3$ 이고

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(c) = -3$ 인 상수 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f(c) = -3 \pm \sqrt{g(c)} = -3 \text{에서}$$

$$g(c) = 0$$

이때 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는

$x = c$ ($0 < c < 2$)에서 극소이다.

$$g'(x)$$

$$= 3a \cdot \cos^2 2\pi \cdot (-2\pi \sin 2\pi) \cdot e^{\sin^2 2\pi x}$$

$$+ a \cos^3 2\pi x \cdot e^{\sin^2 2\pi x} \cdot 2\sin 2\pi x \cdot 2\pi \cos 2\pi x$$

$$= 2a\pi \sin 2\pi x \times \cos^2 2\pi x \times e^{\sin^2 2\pi x}$$

$$\times (-3 + 2\cos^2 2\pi x)$$

열린구간 $(0, 1)$ 에서

$$\cos^2 2\pi x \geq 0, e^{\sin^2 2\pi x} > 0, -3 + 2\cos^2 2\pi x < 0 \text{이고}$$

$$\sin 2\pi x = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

이때 $a > 0$ 이므로 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $g(x)$ 는

$$x = \frac{1}{2} \text{에서만 극소이다.}$$

$$\text{따라서 } x = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

이때 ㉔의 양변에 $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{1}{2}\right) + 3\right\}^2 = g\left(\frac{1}{2}\right) \text{에서}$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{2}\right) + 3\right\}^2 = 0$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

이때 조건 (가)에서 양변에 $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 + 6f\left(\frac{1}{2}\right) = -a + 2b$$

$$(-3)^2 + 6 \cdot (-3) = -a + 2b$$

$$-a + 2b = -9$$

... ㉔

㉔, ㉔을 연립하면

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{17}{4}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{17}{4}\right) = -\frac{17}{8}$$

29 정답 10

해설 곡선 $x^2 - 4xy + 6y^2 = 10$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 4y - 4x \frac{dy}{dx} + 12y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{2x - 6y} \quad (\text{단, } x \neq 3y)$$

점 A($2a, a+k$)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2a - 2(a+k)}{2 \cdot 2a - 6(a+k)} = \frac{k}{a+3k}$$

점 B($2b, b+k$)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2b - 2(b+k)}{2 \cdot 2b - 6(b+k)} = \frac{k}{b+3k}$$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{k}{a+3k} \cdot \frac{k}{b+3k} = -1$$

$$10k^2 + 3(a+b)k + ab = 0 \quad \dots \text{㉔}$$

점 A가

$$\text{곡선 } x^2 - 4xy + 6y^2 = 10, \text{ 즉 } (x-2y)^2 + 2y^2 = 10$$

위의 점이므로

$$2k^2 + (a+k)^2 = 5 \quad \dots \text{㉔}$$

점 B가 곡선 $x^2 - 4xy + 6y^2 = 10$, 즉

$$(x-2y)^2 + 2y^2 = 10 \text{ 위의 점이므로}$$

$$2k^2 + (b+k)^2 = 5 \quad \dots \text{㉔}$$

㉔, ㉔에서

$$(a+k)^2 = (b+k)^2$$

$$(a-b)(a+b+2k) = 0$$

이때 $a \neq b$ 이므로

$$a+b = -2k \quad \dots \text{㉔}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$10k^2 - 6k^2 + ab = 0$$

$$\therefore k^2 = -\frac{ab}{4} \quad \dots \text{㉔}$$

㉔에서

$$3k^2 + 2ak + a^2 = 5$$

㉔, ㉔을 위 식에 대입하면

$$-\frac{3ab}{4} + a(-a-b) + a^2 = 5$$

$$\therefore ab = -\frac{20}{7}$$

$$\text{이때 ㉔에서 } k^2 = -\frac{ab}{4} = \frac{5}{7} \text{ 이므로}$$

$$14k^2 = 14 \cdot \frac{5}{7} = 10$$

30 정답 108

해설 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 이라 하자.
이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1 \neq 0$ 이다.

(i) $r > 1$ 인 경우

a_n 의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r = 1$ 인 경우

a_n 의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r = -1$ 인 경우

a_n 의 값이 $a_1, -a_1, a_1, -a_1, a_1, \dots$ 이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r < -1$ 인 경우

a_n 의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(v) $r = 0$ 인 경우

a_n 의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$ 이다.

이때 $b_3 = 1$ 에서 $a_3 > 1$ 이므로

$$a_1 r^2 > 1$$

이때 $0 < r^2 < 1$ 이므로

$$a_1 > 1$$

$$\therefore b_1 = 1$$

또, $a_1 > 1$ 이므로 $0 < r < 1$ 이면 a_n 의 모든 항은 양수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

$$\therefore -1 < r < 0$$

(a) $a_2 = a_1 r > 1$ 일 때

$$a_1 > 1 \text{에서 } r = \frac{1}{a_1} > 0 \text{이므로 모순이다.}$$

따라서 $a_2 = a_1 r \leq 1$ 이므로

$$b_2 = a_2 = a_1 r$$

(b) $b_3 = 1$ 이므로

$$a_3 = a_1 r^2 > 1$$

(c) $a_4 = a_1 r^3 > 1$ 일 때

$$a_4 = a_1 r^3 = a_1 r^2 \cdot r < 0 \text{이므로 모순이다.}$$

즉, $a_4 \leq 1$ 이므로

$$b_4 = a_4 = a_1 r^3$$

(d) $a_5 = a_1 r^4 > 1$ 일 때

$b_5 = 1$ 이고 $b_1 + b_3 + b_5 = 3$ 이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$$b_5 = a_5 = a_1 r^4$$

(e) $a_6 = a_1 r^5 < 0$ 이므로

$$a_6 < 1$$

$$\therefore b_6 = a_6 = a_1 r^5$$

같은 방법으로 생각하면

$$b_7 = a_7, b_8 = a_8, b_9 = a_9, \dots \text{이므로}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & (n=1, n=3) \\ a_1 r^{n-1} & (n=2, n \geq 4) \end{cases}$$

따라서 조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = 1 + 1 + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8 + \dots$$

$$= 2 + \frac{a_1 r^4}{1-r^2} = 3$$

$$\frac{a_1 r^4}{1-r^2} = 1$$

$$\therefore a_1 r^4 = 1 - r^2 \quad \dots \textcircled{A}$$

또, 조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + \dots$$

$$= \frac{a_1 r}{1-r^2} = -27$$

$$a_1 r = -27(1-r^2) \quad \dots \textcircled{B}$$

①, ②에서 $a_1 r = -27a_1 r^4$ 이므로

$$r^3 = -\frac{1}{27}$$

즉, $r = -\frac{1}{3}$ 이므로 ②에 대입하면

$$-\frac{1}{3}a_1 = -24$$

$$\therefore a_1 = 72$$

따라서 $a_n = 72 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| 72 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{72}{1-\frac{1}{3}} = 108$$