수학 I 2024학년도 수능 쉬운 4점

고3 23년 11월

2024.08.23 | 4문제 | 부산연제고등학교 이름 ______________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

| 로그의 여러 가지 성질을 이용한 계산 | 정답률 74%

01 [2023년 11월 고3 9번 변형]

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_3 2)$, $\mathrm{Q}(\log_3 36)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 2일 때, 18^m의 값은? (단, $0<m<1$)

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

| 움직인 거리(1) : 직선 운동에서의 위치와 움직인 거리 | 정답률 72%

02 [2023년 11월 고3 10번 변형]

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=3t^2-6t+4$, $v_2(t)=12t-20$이다.
시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$)

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

| 여러 가지 수열의 합(1) : 부분분수를 이용하는 경우 | 정답률 58%

03 [2023년 11월 고3 11번 변형]

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_5=|a_7|$, $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{5}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

① 25 ② 20 ③ 15
④ 10 ⑤ 5

| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 | 정답률 49%

04 [2023년 11월 고3 20번 변형]

$a>\sqrt{6}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=-2x^3+ax^2+3x$라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오.

수학 I 2024학년도 수능 쉬운 4점

고3 23년 11월

2024.08.23 | 4문제 | 부산연제고등학교 이름 ________________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

01 정답 ③

해설 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_3 2)$, $\mathrm{Q}(\log_3 36)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m\cdot\log_3 36+(1-m)\cdot\log_3 2}{m+(1-m)}=2$$

$$m\cdot\log_3 36+(1-m)\cdot\log_3 2=2$$

$$m(\log_3 36-\log_3 2)=2-\log_3 2$$

$$m\cdot\log_3\frac{36}{2}=\log_3\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ m=\frac{\log_3\frac{9}{2}}{\log_3 18}=\log_{18}\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ 18^m=18^{\log_{18}\frac{9}{2}}=\frac{9}{2}$$

02 정답 ②

해설 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=0+\int_0^t(3t^2-6t+4)dt$$
$$=t^3-3t^2+4t$$

$$x_2(t)=0+\int_0^t(12t-20)dt$$
$$=6t^2-20t$$

$$\therefore\ f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$$
$$=|t^3-9t^2+24t|$$

함수 $g(t)$를 $g(t)=t^3-9t^2+24t$라 하면

$g'(t)=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

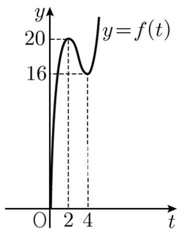
$g'(t)=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$

$t\geq 0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	↗	20	↘	16	↗

$t\geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)\geq 0$이므로 $f(t)=g(t)$이고 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(t)$는 구간 $[0, 2]$에서 증가하고, 구간 $[2, 4]$에서 감소하고, 구간 $[4, \infty)$에서 증가한다.

즉, $a=2$, $b=4$이므로 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^4|v_2(t)|dt=\int_2^4|12t-20|dt$$
$$=\Big[6t^2-20t\Big]_2^4$$
$$=6\cdot 4^2-20\cdot 4-(6\cdot 2^2-20\cdot 2)$$
$$=32$$

03 정답 ④

해설 $a_5=|a_7|$

$a_5=a_7$ 또는 $-a_5=a_7$ … ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로

$a_5 \neq a_7$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$-a_5=a_7$, 즉 $a_5+a_7=0$ … ㉢

한편, $a_5=|a_7|$에서 $a_5 \geq 0$이고, $a_5+a_7=0$이므로

$a_7<0<a_5$이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 음수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d<0)$이라 하면 ㉢에서

$(a_1+4d)+(a_1+6d)=0$

$a_1=-5d$ … ㉣

한편, $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{5}$에서

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_5}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+4d}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\cdot\frac{4d}{a_1(a_1+4d)}$$
$$=\frac{4}{a_1(a_1+4d)}$$

따라서 $\frac{4}{a_1(a_1+4d)}=\frac{1}{5}$이므로

$a_1(a_1+4d)=20$ … ㉤

㉣을 ㉤에 대입하면

$-5d\cdot(-d)=20$

$d^2=4$

이때 $d<0$이므로

$d=-2$

따라서 $d=-2$를 ㉣에 대입하면

$a_1=-5\cdot(-2)=10$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10\{2\cdot 10+9\cdot(-2)\}}{2}$$
$$=10$$

04 정답 50

해설 $f(x)=-2x^3+ax^2+3x$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+3$

$f'(0)=3$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=3x$이다.

이때 $y=f(x)$와 직선 $y=3x$가 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=3x$에서

$-2x^3+ax^2+3x=3x$

$x^2(2x-a)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{a}{2}$

이때 점 A의 x좌표는 0이 아니므로 점 A의 x좌표는 $\frac{a}{2}$이다.

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}a\right)$이고 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{2}$

따라서 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이고,

$f'\left(\frac{a}{2}\right)=-6\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+2a\cdot\frac{a}{2}+3=3-\frac{a^2}{2}$이므로

직선 AB의 기울기는 $-\frac{a^2}{2}+3$이고

$3\cdot\left(-\frac{a^2}{2}+3\right)=-1$에서

$a^2=\frac{20}{3}$

$\therefore\ a=\frac{2\sqrt{15}}{3}\ (\because\ a>\sqrt{6})$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\ \sqrt{15}\right)$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)+\sqrt{15}$ … ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)+\sqrt{15}$

$\therefore\ x=\frac{10\sqrt{15}}{3}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{10\sqrt{15}}{3},\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2+(\sqrt{15})^2}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{10\sqrt{15}}{3}-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2+(0-\sqrt{15})^2}=5\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}\cdot 5\sqrt{6}=50$