미적분 2024 수능 미적분 전체 문제 변형 (2023 시행)

고3 23년 11월

2024.08.23 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 ____________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

| 지수법칙(2) : 지수가 유리수일 때 | 정답률 86%

01 [2022년 3월 고3 1번/2점]

$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$의 값은?

① 1　② $\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{3}$　⑤ 9

| 미분계수를 이용하여 극한값 구하기 | 정답률 75%

02 함수 $f(x)=x^2-3$에 대하여

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2)-f(2-h)}{h}$의 값을 구하시오.

| 여러 가지 각의 삼각함수 | 정답률 77%

03 [2023년 11월 고3 3번 변형]

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(-\theta)=-\frac{1}{4}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① -4　② $-\sqrt{15}$　③ $-2\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{15}$

| 함수가 연속일 조건(1) : 구간별로 주어진 함수가 연속일 조건 | 정답률 90%

04 [2022년 7월 고3 5번/3점]

함수 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ x^2-ax+3 & (x \geq 2) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : f'(x)로부터 f(x)구하기 | 정답률 92%

05 [2020년 11월 고3 문과 23번/3점]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x+5$이고 $f(0)=4$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

| 부분의 합이 주어진 등비수열의 합 | 정답률 75%

06 [2023년 11월 고3 6번 변형]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_5-S_3=4a_5$, $a_6=\frac{4}{3}$일 때, a_1+a_2의 값은?

① 432　② 430　③ 428　④ 426　⑤ 424

| 함수의 극대 · 극소 (함수의 극값, 극댓값, 극솟값 구하기) | 정답률 88%

07

[2018년 11월 고2 문과 12번/3점]

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이 $x=\alpha$에서 극댓값 M을 가질 때, $\alpha+M$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

| 우함수 · 기함수의 정적분(1) : 피적분함수가 주어진 경우 | 정답률 81%

08

[2023년 11월 고3 8번 변형]

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x)+f(x)=x^4+x$를 만족시킬 때, $\int_{-3}^{3} f(x)dx$의 값은?

① -14 ② -16 ③ -18
④ -20 ⑤ -22

| 로그의 여러 가지 성질을 이용한 계산 | 정답률 74%

09

[2023년 11월 고3 9번 변형]

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_3 2)$, $\mathrm{Q}(\log_3 36)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 2일 때, 18^m의 값은? (단, $0<m<1$)

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

| 움직인 거리(1) : 직선 운동에서의 위치와 움직인 거리 | 정답률 72%

10

[2023년 11월 고3 10번 변형]

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=3t^2-6t+4$, $v_2(t)=12t-20$이다.
시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$)

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

| 여러 가지 수열의 합(1) : 부분분수를 이용하는 경우 | 정답률 58%

11

[2023년 11월 고3 11번 변형]

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_5=|a_7|$, $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{5}$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

① 25 ② 20 ③ 15
④ 10 ⑤ 5

| 두 곡선 사이의 넓이의 활용(2) : 넓이의 최솟값 | 정답률 55%

12

[2023년 11월 고3 12번 변형]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$과 실수 t $(0<t<3)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -2(x-t)+f(t) & (x\ge t)\end{cases}$이다.

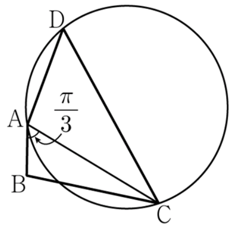
함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{20}{3}$ ② $\frac{61}{9}$ ③ $\frac{62}{9}$
④ 7 ⑤ $\frac{64}{9}$

| 외접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이 | 정답률 62%

13 [2023년 11월 고3 13번 변형]

다음 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$, $\overline{AD}\cdot\overline{CD}=32$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$ 인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자. $S_2=\frac{7}{3}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은?



① $\frac{511}{98}$ ② $\frac{256}{49}$ ③ $\frac{513}{98}$
④ $\frac{257}{49}$ ⑤ $\frac{515}{98}$

| 방정식 f(x)=g(x)의 실근 | 정답률 33%

14 [2023년 11월 고3 14번 변형]

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 & \left(x\le\frac{5}{2}\right) \\ 4a(2x-5)(x-b)+19 & \left(x>\frac{5}{2}\right)\end{cases}$$ 이다.

실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to k-}g(t)\cdot\lim_{t\to k+}g(t)-g(k)=6$$

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 39%

15 [2023년 11월 고3 15번 변형]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 3^{a_n} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_n & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$ 를

만족시킬 때, $a_5+a_6=4$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 390 ② 392 ③ 394
④ 396 ⑤ 398

| 지수에 미지수를 포함하는 방정식(1) : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | 정답률 89%

16 [2017년 4월 고3 이과 6번 변형]

방정식 $\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}=2^{x-2}$을 만족시키는 실수 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

| 곱의 미분법(1) : y=f(x)g(x) 꼴 | 정답률 88%

17

함수 $f(x)=(2x^2-3x)(x^3-x^2+x-1)$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

| Σ의 성질 | 정답률 76%

18 [2023년 11월 고3 18번 변형]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(2b_k-3),\ \sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=20$$일 때,

$\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오.

| 삼각함수가 포함된 부등식(2) : (치환하여) 이차 이상의 다항식이 되는 경우 | 정답률 61%

19 [2023년 11월 고3 19번 변형]

함수 $f(x)=\sin\pi x$라 할 때, $0<x<4$에서 부등식 $f(1+x)f(1-x)>-\frac{1}{2}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 | 정답률 49%

20 [2023년 11월 고3 20번 변형]

$a>\sqrt{6}$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=-2x^3+ax^2+3x$라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오.

| 로그함수의 최대 · 최소 (2) : 최대 · 최소를 이용하여 미지수 구하기 | 정답률 50%

21 [2023년 11월 고3 21번 변형]

양수 a에 대하여 $x\geq-1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases}-2x^2+12x & (-1\leq x<5)\\ a\log_2(x-4) & (x\geq 5)\end{cases}$ 이다. $t\geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 16이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

| 함수의 그래프 그리기 | 정답률 34%

22 [2023년 11월 고3 22번 변형]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $f(\alpha)f(\alpha+2)<0$을 만족시키는 정수 α는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{7}{6}$ 일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

| 로그함수의 극한(1) : lim{x->0} ln(1+x)/x 꼴의 극한 | 정답률 84%

23 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+8x)}$의 값을 구하시오.

| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 | 정답률 80%

24 [2023년 11월 고3 미적분 24번 변형]

매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선 $x=\ln(3t^2+1)$, $y=\sin\pi t^2$에서 $t=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{5\sqrt{2}}{24}\pi$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{24}\pi$
④ $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$

| 치환적분을 이용한 정적분(2) : 유리함수 | 정답률 58%

25 [2023년 11월 고3 미적분 25번 변형]

양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여
$\int_2^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx=3\ln a-\ln(a+2)-\ln 2$이고
$f(2)=4$일 때, $f(6)$의 값은?

① 46 ② 48 ③ 50
④ 52 ⑤ 54

| 입체도형의 부피; 단면이 밑면과 수직인 경우(1) | 정답률 50%

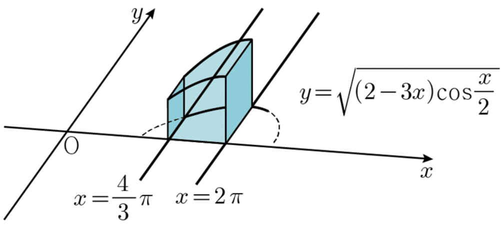
26 [2023년 11월 고3 미적분 26번 변형]

다음 그림과 같이

곡선 $y=\sqrt{(2-3x)\cos\frac{x}{2}}\ \left(\frac{4}{3}\pi\le x\le 2\pi\right)$와

x축 및 두 직선 $x=\frac{4}{3}\pi$, $x=2\pi$로 둘러싸인 부분을

밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $6-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\pi$ ② $6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\pi$
③ $12-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\pi$ ④ $12+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\pi$
⑤ $18-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\pi$

| 접선의 방정식(4) : 곡선 밖의 점이 주어진 경우 | 정답률 59%

27 [2023년 11월 고3 미적분 27번 변형]

실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{2}{e^x}-e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-2\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은?

① $\frac{4}{3}\sqrt{e}$ ② $\frac{5}{3}\sqrt{e}$ ③ $2\sqrt{e}$
④ $\frac{7}{3}\sqrt{e}$ ⑤ $\frac{8}{3}\sqrt{e}$

| 정적분(4) : 지수함수 | 정답률 36%

28 [2023년 11월 고3 미적분 28번 변형]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-2xe^{x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여 $3g(t)+h(t)=k$ (k는 상수)를 만족시킨다. $\int_0^{11} f(x)dx=3(e^9-1)$일 때, $\frac{f(5)}{f(8)}$의 값은?

① $\frac{1}{2e^3}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ e
④ $2e^3$ ⑤ $4e^5$

| 등비급수의 응용(5) : 그 외 | 정답률 46%

29 [2023년 11월 고3 미적분 29번 변형]

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right),$$

$$13\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=40\sum_{n=1}^{\infty}|a_{4n}|$$ 이 성립한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}+b_{3n+2}}{b_n}=S$일 때, $600S$의 값을 구하시오.

| 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소 | 정답률 31%

30 [2023년 11월 고3 미적분 30번 변형]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=|\cos x|\sin x$이다.
양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.

함수 $h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$\frac{60}{\pi}(a_5-a_3)$의 값을 구하시오.

미적분 2024 수능 미적분 전체 문제 변형 (2023 시행)

고3 23년 11월

2024.08.23 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 ________________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

01 정답 ⑤

해설 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}$$
$$=3^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}$$
$$=3^2=9$$

02 정답 4

해설
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\{(2-h)^2-3\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h-h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(4-h)=4$$

03 정답 ②

해설 $\cos(-\theta)=\cos\theta=-\frac{1}{4}$에서

$\cos\theta=-\frac{1}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{15}$$

04 정답 ③

해설 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2-}(x-1)=\lim_{x\to 2+}(x^2-ax+3)=f(2)$$
$1=7-2a$

$\therefore\ a=3$

05 정답 12

해설 부정적분을 계산할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2+4x+5$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2+4x+5)dx$$
$$=x^3+2x^2+5x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=4$이므로

$C=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+5x+4$이므로

$f(1)=1+2+5+4=12$

06 정답 ①

해설 $S_5-S_3=a_5+a_4$이므로

$a_4+a_5=4a_5,\ a_4=3a_5$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_6=\frac{4}{3}$에서 $r\neq 0$이고

$a_4=3a_5$에서 $r=\frac{a_5}{a_4}=\frac{1}{3}$

$a_6=a_1\cdot r^5$에서

$a_1=a_6\cdot\frac{1}{r^5}=\frac{4}{3}\cdot 3^5=324,$

$a_2=a_1\cdot r=324\cdot\frac{1}{3}=108$

$\therefore\ a_1+a_2=108+324=432$

07 정답 ②

해설 도함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$

$\therefore\ \alpha=1,\ M=f(1)=5$

따라서 $\alpha+M=6$

08 정답 ③

해설 $xf(x)+f(x)=x^4+x$에서

$(x+1)f(x)=x(x+1)(x^2-x+1)$ $\cdots$ ㉠

$f(x)$가 삼차함수이고 ㉠이 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=x(x^2-x+1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_{-3}^{3}f(x)dx&=\int_{-3}^{3}x(x^2-x+1)dx\\&=\int_{-3}^{3}(x^3-x^2+x)dx\\&=2\int_{0}^{3}(-x^2)dx\\&=-2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3\\&=-18\end{aligned}$$

09 정답 ③

해설 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_3 2)$, $\mathrm{Q}(\log_3 36)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m\cdot\log_3 36+(1-m)\cdot\log_3 2}{m+(1-m)}=2$$

$m\cdot\log_3 36+(1-m)\cdot\log_3 2=2$

$m(\log_3 36-\log_3 2)=2-\log_3 2$

$m\cdot\log_3\frac{36}{2}=\log_3\frac{9}{2}$

$$\therefore\ m=\frac{\log_3\frac{9}{2}}{\log_3 18}=\log_{18}\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ 18^m=18^{\log_{18}\frac{9}{2}}=\frac{9}{2}$$

10 정답 ②

해설 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$\begin{aligned}x_1(t)&=0+\int_0^t(3t^2-6t+4)dt\\&=t^3-3t^2+4t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2(t)&=0+\int_0^t(12t-20)dt\\&=6t^2-20t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(t)&=|x_1(t)-x_2(t)|\\&=|t^3-9t^2+24t|\end{aligned}$$

함수 $g(t)$를 $g(t)=t^3-9t^2+24t$라 하면

$g'(t)=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

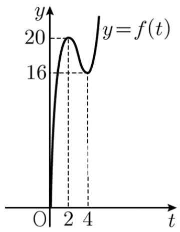
$g'(t)=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$

$t\ge 0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	$\nearrow$	20	$\searrow$	16	$\nearrow$

$t\ge 0$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)\ge 0$이므로 $f(t)=g(t)$이고 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(t)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, 구간 $[2,\ 4]$에서 감소하고, 구간 $[4,\ \infty)$에서 증가한다.

즉, $a=2$, $b=4$이므로 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_2^4|v_2(t)|dt&=\int_2^4|12t-20|dt\\&=\left[6t^2-20t\right]_2^4\\&=6\cdot4^2-20\cdot4-(6\cdot2^2-20\cdot2)\\&=32\end{aligned}$$

11 정답 ④

해설 $a_5=|a_7|$

$a_5=a_7$ 또는 $-a_5=a_7$ $\cdots$ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로

$a_5\ne a_7$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$-a_5=a_7$, 즉 $a_5+a_7=0$ $\cdots$ ㉢

한편, $a_5=|a_7|$에서 $a_5\geq 0$이고, $a_5+a_7=0$이므로

$a_7<0<a_5$이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 음수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d<0)$이라 하면 ㉢에서

$(a_1+4d)+(a_1+6d)=0$

$a_1=-5d$ ⋯ ㉣

한편, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{5}$에서

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_5}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+4d}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\cdot\frac{4d}{a_1(a_1+4d)}$$
$$=\frac{4}{a_1(a_1+4d)}$$

따라서 $\dfrac{4}{a_1(a_1+4d)}=\dfrac{1}{5}$이므로

$a_1(a_1+4d)=20$ ⋯ ㉤

㉣을 ㉤에 대입하면

$-5d\cdot(-d)=20$

$d^2=4$

이때 $d<0$이므로

$d=-2$

따라서 $d=-2$를 ㉣에 대입하면

$a_1=-5\cdot(-2)=10$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10\{2\cdot 10+9\cdot(-2)\}}{2}$$
$$=10$$

12 정답 ⑤

해설 함수 $g(x)$는 $x\geq t$일 때, 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 -2인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $\left(t+\dfrac{f(t)}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{f(t)}{2}-t\right)\cdot f(t)$$
$$=\int_0^t f(x)dx+\frac{\{f(t)\}^2}{4}$$

이때 양변을 미분하면

$$S'(t)=f(t)+\frac{f(t)\cdot f'(t)}{2}$$
$$=f(t)\left\{1+\frac{f'(t)}{2}\right\}$$

한편, $f(x)=\dfrac{1}{3}x(x-3)(x-6)$이므로 $0<t<3$에서

$f(t)>0$

이때 $1+\dfrac{f'(t)}{2}$를 정리하면

$$1+\frac{f'(t)}{2}$$
$$=1+\frac{1}{6}\{(t-3)(t-6)+t(t-6)+t(t-3)\}$$
$$=1+\frac{1}{6}\{(t^2-9t+18)+(t^2-6t)+(t^2-3t)\}$$
$$=1+\frac{1}{6}(3t^2-18t+18)$$
$$=1+\frac{1}{2}(t^2-6t+6)$$
$$=\frac{1}{2}(t^2-6t+8)$$
$$=\frac{1}{2}(t-2)(t-4)$$

따라서 $0<t<3$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	(극대)	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S(2)=\int_0^2 f(x)dx+\frac{\{f(2)\}^2}{4}$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^2 x(x-3)(x-6)dx$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-4)\right\}^2$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^2(x^3-9x^2+18x)dx+\frac{16}{9}$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^2+\frac{16}{9}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 16-3\cdot 8+9\cdot 4\right)+\frac{16}{9}$$
$$=\frac{64}{9}$$

13 정답 ②

해설 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=a\ (a>0)$이라 하면
코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\cos(\angle\mathrm{BAC})$$

$$(2\sqrt{7})^2=2^2+a^2-2\cdot2\cdot a\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$a^2-2a-24=0,\ (a+4)(a-6)=0$$

이때 $a>0$이므로 $a=6$

즉, $\overline{\mathrm{AC}}=6$이므로 삼각형 ABC의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\sin(\angle\mathrm{BAC})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot6\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=3\sqrt{3}$$

이때 $\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}=32$이므로 삼각형 ACD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}\cdot\sin(\angle\mathrm{ACD})$$

$$=16\sin(\angle\mathrm{ADC})$$

이때 $S_2=\dfrac{7}{3}S_1$이므로

$$16\sin(\angle\mathrm{ADC})=\frac{7}{3}\cdot3\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sin(\angle\mathrm{ADC})=\frac{7\sqrt{3}}{16}$$

따라서 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}=2R$$

$$\frac{6}{\frac{7\sqrt{3}}{16}}=2R$$

따라서 $R=\dfrac{16\sqrt{3}}{7}$이므로

$$\frac{R}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{7}}{\frac{7\sqrt{3}}{16}}=\frac{256}{49}$$

14 정답 ②

해설 $x\le\dfrac{5}{2}$일 때,

$f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x-2$에서

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x-1)(x+2)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

$x\le\dfrac{5}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\frac{11}{2}$	$\nearrow$	8

또한, a, b가 자연수이므로

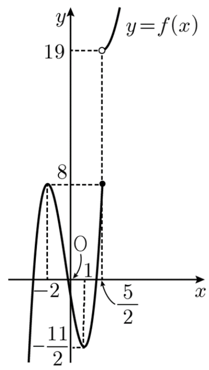
곡선 $y=4a(2x-5)(x-b)+19$는 점 $\left(\dfrac{5}{2},\ 19\right)$와

점 $(b,\ 19)$를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(i) $b=1$ 또는 $b=2$인 경우

함수 $f(x)$는 $x>\dfrac{5}{2}$에서 증가하고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $-\dfrac{11}{2}<k<8$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k)=\lim_{t\to k-}g(t)=\lim_{t\to k+}g(t)=3 \qquad\cdots㉠$$

이므로

$$\lim_{t\to k-}g(t)\cdot\lim_{t\to k+}g(t)-g(k)=6 \qquad\cdots㉡$$

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ii) $b\ge3$인 경우

곡선 $y=4a(2x-5)(x-b)+19$는

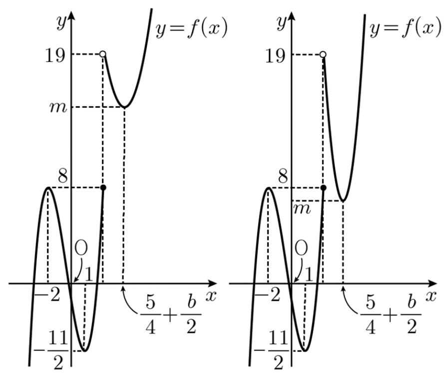
직선 $x=\dfrac{\frac{5}{2}+b}{2}=\dfrac{5}{4}+\dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{4}+\dfrac{b}{2}$에서 극솟값을 갖고

이 값을 m이라 하면

(ii-①)

$m>-\dfrac{11}{2}$인 경우



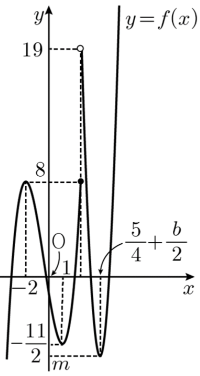
이때 m과 8 중 크지 않은 값을 m_1이라 하면

$-\dfrac{11}{2}<k<m_1$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이

성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-②)

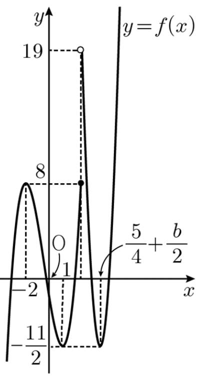
$m<-\dfrac{11}{2}$ 인 경우



이때 $m<k<-\dfrac{11}{2}$ 인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-③)

$m=-\dfrac{11}{2}$ 인 경우



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim\limits_{t\to k-}g(t)$, $\lim\limits_{t\to k+}g(t)$의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim\limits_{t\to k-}g(t)$	$\lim\limits_{t\to k+}g(t)$
$k<-\dfrac{11}{2}$	1	1	1
$k=-\dfrac{11}{2}$	3	1	5
$-\dfrac{11}{2}<k<8$	5	5	5
$k=8$	4	5	2
$8<k<19$	2	2	2
$k=19$	1	2	1
$k>19$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k의 값은 8뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b\geq 3$, $m=-\dfrac{11}{2}$ 이다.

$f\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{b}{2}\right)=-\dfrac{11}{2}$ 에서

$4a\left(-\dfrac{5}{2}+b\right)\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{b}{2}\right)+19=-\dfrac{11}{2}$

$a(2b-5)^2=49$

이때 $49=7^2$이므로 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$a=1$, $2b-5=7$ 또는 $a=49$, $2b-5=1$에서

$(1,\ 6)$, $(49,\ 3)$이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은

$49+3=52$

15 정답 ③

해설 a_n이 3의 배수가 아닐 때 $a_{n+1}=3^{a_n}$은 자연수이고

a_n이 3의 배수일 때 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$은 자연수이다.

$a_5+a_6=4$에서

$a_5=1$, $a_6=3$ 또는 $a_5=3$, $a_6=1$이다.

(ⅰ) $a_5=1$일 때,

$a_5=1$이고 a_4가 3의 배수가 아닌 경우 $a_5=3^{a_4}$에서

$1=3^{a_4}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_4의 값은 존재하지 않는다.

$a_5=1$이고 a_4가 3의 배수인 경우 $a_5=\dfrac{1}{3}a_4$에서

$1=\dfrac{1}{3}a_4$, 즉 $a_4=3$

이때 $a_4=3$이고 a_3이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=3^{a_3}$에서

$3=3^{a_3}$, 즉 $a_3=1$

이때 $a_3=1$이고 a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=3^{a_2}$에서

$1=3^{a_2}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_2의 값은 존재하지 않는다.

이때 $a_3=1$일 때 a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\dfrac{1}{3}a_2$에서

$1=\dfrac{1}{3}a_2$

$a_2=3$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=3^{a_1}$에서

$3=3^{a_1}$, 즉 $a_1=1$

$a_2=3$이고 a_1이 3의 배수인 경우 $a_2=\dfrac{1}{3}a_1$에서

$3=\dfrac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=9$

$a_4=3$이고 a_3이 3의 배수인 경우 $a_4=\dfrac{1}{3}a_3$에서

$3=\dfrac{1}{3}a_3$, 즉 $a_3=9$

$a_3=9$이고 a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=3^{a_2}$에서

$9=3^{a_2}$, 즉 $a_2=2$
이때 $a_2=2$일 때 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$2=3^{a_1}$
이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 존재하지 않는다.
$a_2=2$일 때 a_1이 3의 배수인 경우 $a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$2=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=6$
$a_3=9$이고 a_2가 3의 배수인 경우 $a_3=\frac{1}{3}a_2$에서
$9=\frac{1}{3}a_2$, 즉 $a_2=27$
$a_2=27$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$27=3^{a_1}$, 즉 $a_1=3$
이때 a_1이 3의 배수이므로 모순이다.
$a_2=27$이고 a_1이 3의 배수인 경우 $a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$27=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=81$
따라서 a_1의 값은 1 또는 6 또는 9 또는 81이다.
(ii) $a_5=3$일 때,
(i)의 과정을 이용하면
$a_2=1$ 또는 $a_2=6$ 또는 $a_2=9$ 또는 $a_2=81$
이때 $a_2=1$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$1=3^{a_1}$
이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 존재하지 않는다.
$a_2=1$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서 $1=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=3$
$a_2=6$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$6=3^{a_1}$
이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 존재하지 않는다.
$a_2=6$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서 $6=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=18$
$a_2=9$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$9=3^{a_1}$, 즉 $a_1=2$
$a_2=9$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$9=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=27$
$a_2=81$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$81=3^{a_1}$, 즉 $a_1=4$
$a_2=81$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$81=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=243$
따라서 a_1의 값은 2 또는 3 또는 4 또는 18 또는 27 또는 243이다.
(i), (ii)에서 모든 a_1의 값의 합은
$(1+6+9+81)+(2+3+4+18+27+243)$
$=394$

16 정답 ④

해설 $(2^{-2})^{3-x}=2^{x-2}$
$2^{-6+2x}=2^{x-2}$
$-6+2x=x-2$
$\therefore x=4$

17 정답 ③

해설
$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x^2-3x)'(x^3-x^2+x-1)\\&\quad+(2x^2-3x)(x^3-x^2+x-1)'\\&=(4x-3)(x^3-x^2+x-1)\\&\quad+(2x^2-3x)(3x^2-2x+1)\\&=4x^4-7x^3+7x^2-7x+3\\&\quad+6x^4-13x^3+8x^2-3x\\&=10x^4-20x^3+15x^2-10x+3\end{aligned}$$
$\therefore f'(2)=160-160+60-20+3=43$

18 정답 10

해설 $\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5}(2b_k - 3)$

$= 2\sum_{k=1}^{5} b_k - 15 \quad \cdots ㉠$

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k + b_k) = 20$에서

$2\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = 20$

$\sum_{k=1}^{5} b_k = -2\sum_{k=1}^{5} a_k + 20 \quad \cdots ㉡$

이때 ㉠을 ㉡에 대입하면

$\sum_{k=1}^{5} b_k = -2\left(2\sum_{k=1}^{5} b_k - 15\right) + 20$

$\sum_{k=1}^{5} b_k = -4\sum_{k=1}^{5} b_k + 50$

$5\sum_{k=1}^{5} b_k = 50$

$\therefore \sum_{k=1}^{5} b_k = 10$

19 정답 6

해설 $f(1+x) = \sin(\pi + \pi x) = -\sin\pi x$,

$f(1-x) = \sin(\pi - \pi x) = \sin\pi x$이므로 주어진 부등식은

$-\sin^2\pi x > -\frac{1}{2}$, 즉 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\pi x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots ㉠$

이때 $0 < x < 4$에서 $0 < \pi x < 4\pi$이므로 ㉠에서

$0 < \pi x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi < \pi x < \frac{5}{4}\pi$ 또는

$\frac{7}{4}\pi < \pi x < \frac{9}{4}\pi$ 또는 $\frac{11}{4}\pi < \pi x < \frac{13}{4}\pi$ 또는

$\frac{15}{4}\pi < \pi x < 4\pi$

즉, $0 < x < \frac{1}{4}$ 또는 $\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$ 또는 $\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$

또는 $\frac{11}{4} < x < \frac{13}{4}$ 또는 $\frac{15}{4} < x < 4$이므로 구하는

자연수 x의 값은 $1, 2, 3$이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2+3=6$

20 정답 50

해설 $f(x) = -2x^3 + ax^2 + 3x$에서

$f'(x) = -6x^2 + 2ax + 3$

$f'(0) = 3$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=3x$이다.

이때 $y=f(x)$와 직선 $y=3x$가 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=3x$에서

$-2x^3 + ax^2 + 3x = 3x$

$x^2(2x - a) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{a}{2}$

이때 점 A의 x좌표는 0이 아니므로 점 A의 x좌표는 $\frac{a}{2}$이다.

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a\right)$이고 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB} = \frac{\pi}{2}$

따라서 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이고,

$f'\left(\frac{a}{2}\right) = -6 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2a \cdot \frac{a}{2} + 3 = 3 - \frac{a^2}{2}$ 이므로

직선 AB의 기울기는 $-\frac{a^2}{2} + 3$이고

$3 \cdot \left(-\frac{a^2}{2} + 3\right) = -1$에서

$a^2 = \frac{20}{3}$

$\therefore a = \frac{2\sqrt{15}}{3}$ $(\because a > \sqrt{6})$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{15}\right)$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\sqrt{15}}{3}\right) + \sqrt{15} \quad \cdots ㉠$

㉠에 $y=0$을 대입하면

$0 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\sqrt{15}}{3}\right) + \sqrt{15}$

$\therefore x = \frac{10\sqrt{15}}{3}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{10\sqrt{15}}{3}, 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 + (\sqrt{15})^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$,

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{15}}{3} - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 + (0 - \sqrt{15})^2} = 5\sqrt{6}$

$\therefore \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{AB}} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \cdot 5\sqrt{6} = 50$

21 정답 16

해설 $-1 \le x < 5$에서

$f(x) = -2x^2 + 12x$

$\quad = -2(x-3)^2 + 18$

따라서 $t=0$일 때, 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는

$x=2$에서 최댓값 $f(2) = -2 \cdot (-1)^2 + 18 = 16$을

가지므로

$g(0) = 16$

한편, 함수 $y = -2x^2 + 12x$는 직선 $x=3$에 대하여

대칭이고 $f(4)=16$, $f(5)=0$이므로 $1 \le t \le 3$일 때,

$g(t) \ge 16$

또, 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$가 최솟값을 16으로 갖기

위해서는 $t=4$일 때, 구간 $[4,\ 6]$에서 함수 $f(x)$의

최댓값이 16 이상이어야 하므로

$f(6) \ge 16$

따라서 $x \ge 6$에서 $f(x) = a\log_2(x-4)$이므로

$a\log_2(6-4) \ge 16$

$\therefore\ a \ge 16$

따라서 양수 a의 최솟값은 16이다.

22 정답 114

해설 주어진 조건에서 함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$f(\alpha)f(\alpha+2) \ge 0$을 만족시켜야 한다. $\cdots$ ㉠

이때 함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은

반드시 실근을 갖는다.

(i) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라 할 때, a보다 작은

정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m) < 0 < f(m+2)$이므로

$f(m)f(m+2) < 0$이 되어 ㉠을 만족시키지

않는다.

(ii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인

경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a, b $(a<b)$라 할 때,

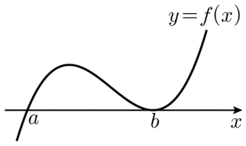
양수 k에 대하여

$f(x) = k(x-a)(x-b)^2$ 또는

$f(x) = k(x-a)^2(x-b)$

(ii-①)

$f(x) = k(x-a)(x-b)^2$일 때



a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1) < 0$, $f(m) < 0$, $f(m+1) \ge 0$,

$f(m+2) \ge 0$

이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1) \ge 0$,

$f(m)f(m+2) \ge 0$이어야 하므로

$f(m+1) = f(m+2) = 0$이어야 한다.

따라서 $a = m+1$, $b = m+2$이다.

이때 $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$이므로 $m+1 < \dfrac{1}{3} < m+2$이고

정수 m의 값은 -1이다. $\cdots$ ㉡

$\therefore\ f(x) = kx(x-1)^2$

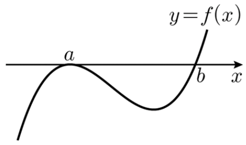
그러나 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) > 0$이므로 $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$을

만족시키지 않는다.

(ii-②)

$f(x) = k(x-a)^2(x-b)$일 때



만약, $a<n<b$인 정수 n이 존재한다면 그 중 가장

큰 값을 n_1이라 할 때,

$f(n_1) < 0 < f(n_1+2)$이므로

$f(n_1)f(n_1+2) < 0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

즉, $a<n<b$인 정수 n은 존재하지 않는다. $\cdots$ ㉢

따라서 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1) < 0$, $f(m) < 0$, $f(m+1) \ge 0$,

$f(m+2) \ge 0$

이때 ㉡과 마찬가지로 $a = m+1$, $b = m+2$,

정수 m의 값은 -1이다.

$\therefore\ f(x) = kx^2(x-1)$

그러나 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) > 0$이므로 $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$을

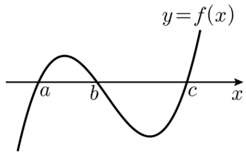
만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인

경우

$f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$라

하면



이때 ㉢과 마찬가지로 $b<n<c$인 정수 n은

존재하지 않는다.

따라서 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1) < 0$, $f(m) < 0$, $f(m+1) \ge 0$,

$f(m+2) \ge 0$

이때 ㉡과 마찬가지로 $b = m+1$, $c = m+2$,

정수 m의 값은 -1이다.

따라서

$f(x) = k(x-a) \cdot x \cdot (x-1)$

$\quad = k(x-a)(x^2-x)$

$f'(x) = k(x^2-x) + k(x-a)(2x-1)$

이므로

$f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2}{9}k + k \cdot \left(\dfrac{1}{3} - a\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{7}{6}$

$f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{9}k + k \cdot \left(-\dfrac{1}{3} - a\right) \cdot \left(-\dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$$-\frac{2}{9}k-\frac{1}{9}k+\frac{1}{3}ak=-\frac{7}{6},$$

$$\frac{4}{9}k+\frac{5}{9}k+\frac{5}{3}ak=-\frac{1}{2}$$

두 식을 연립하여 정리하면

$$k=2,\ a=-\frac{3}{4}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$는

$$f(x)=2x\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-1)$$

$$\therefore\ f(4)=2\cdot 4\cdot\frac{19}{4}\cdot 3=114$$

23 정답 $\frac{1}{4}$

해설 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+8x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{8x}{\ln(1+8x)}\cdot\frac{2}{8}$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

24 정답 ③

해설 $x=\ln(3t^2+1)$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6t}{3t^2+1}$$

$y=\sin\pi t^2$에서

$$\frac{dy}{dt}=2\pi t\cos\pi t^2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{2\pi t\cos\pi t^2}{\frac{6t}{3t^2+1}}$$

$$=\frac{\pi(3t^2+1)\cos\pi t^2}{3}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{\pi\left\{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right\}\cos\left(\pi\cdot\frac{1}{4}\right)}{3}=\frac{\pi\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{24}\pi$$

25 정답 ⑤

해설 함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고
그 역함수 $f(x)$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
즉, 모든 양수 x에 대하여

$f(x)>0$ $\cdots$ ㉠

모든 양수 x에 대하여 $g(f(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=1$$

$$\therefore\ \int_2^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$$

$$=\int_2^a\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$=\Big[\ln|f(x)|\Big]_2^a$$

$$=\ln f(a)-\ln f(2)$$

$$=\ln f(a)-\ln 4$$

$$=\ln f(a)-2\ln 2$$

따라서 $\ln f(a)-2\ln 2=3\ln a-\ln(a+2)-\ln 2$에서

$$\ln f(a)=3\ln a-\ln(a+2)+\ln 2$$

$$=\ln a^3-\ln(a+2)+\ln 2$$

$$=\ln\frac{2a^3}{a+2}$$

즉, $f(a)=\frac{2a^3}{a+2}$이므로

$$f(6)=\frac{2\cdot 6^3}{6+2}=54$$

26 정답 ①

해설 직선 $x=t\ \left(\frac{4}{3}\pi\le t\le 2\pi\right)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=(2-3t)\cos\frac{t}{2}$$

따라서 입체도형의 부피를 V라 하면

$$u(t)=2-3t,\ v'(t)=\cos\frac{t}{2}$$

$u'(t)=-3,\ v(t)=2\sin\frac{t}{2}$이므로

$$V=\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}(2-3t)\cos\frac{t}{2}dt$$

$$=\left[(2-3t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}+6\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=2\left[(2-3t)\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}+6\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}$$

$$=2\left\{-(2-4\pi)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}+6(2-1)$$

$$=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\pi+6$$

27 정답 ③

해설 $y=2e^{-x}-e^{t}$이므로

$y'=-2e^{-x}$

접점의 좌표를 $(s,\ 2e^{-s}-e^{t})$이라고 하면 접선의 방정식은

$y=-2e^{-s}(x-s)+2e^{-s}-e^{t}$

이 접선이 원점을 지나므로

$2se^{-s}+2e^{-s}-e^{t}=0$

$e^{t}=2(s+1)e^{-s}$ $\cdots$ ㉠

양변을 s에 대하여 미분하면

$e^{t}\dfrac{dt}{ds}=2e^{-s}-2(s+1)e^{-s}=-2se^{-s}$ $\cdots$ ㉡

또한, $f(t)=-2e^{-s}$이므로 양변을 s에 대하여 미분하면

$f'(t)\dfrac{dt}{ds}=2e^{-s}$ $\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서

$\dfrac{e^{t}}{f'(t)}=-s$, 즉 $f'(t)=-\dfrac{e^{t}}{s}$

또한, $f(a)=-2e^{-s}=-2\sqrt{e}=-2e^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$s=-\dfrac{1}{2}$

㉠에서 $e^{a}=e^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$f'(t)=-\dfrac{e^{t}}{s}$ 에서

$$f'(a)=-\frac{e^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}=2e^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\sqrt{e}$$

28 정답 ①

해설 $x<0$일 때 $f(x)=-2xe^{x^2}$이므로

$f'(x)=-2e^{x^2}-2xe^{x^2}\cdot 2x$

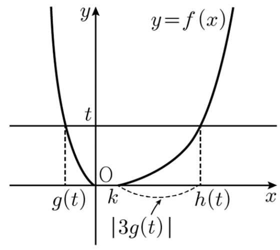
$=-2e^{x^2}-4x^2e^{x^2}<0$

즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

또한, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고

양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$와 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

또한, 모든 양수 t에 대하여 $3g(t)+h(t)=k$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $\displaystyle\int_{0}^{11}f(x)dx=3(e^{9}-1)$에서 $h(t_1)=11$이라 하면

$\displaystyle\int_{g(t_1)}^{0}\left(-2xe^{x^2}\right)dx=e^{9}-1$

$\left[-e^{x^2}\right]_{g(t_1)}^{0}=e^{9}-1$

$-1+e^{\{g(t_1)\}^2}=e^{9}-1$

$g(t_1)=-3$ ($\because g(t_1)<0$)

즉, $k+|3\cdot(-3)|=11$에서 $k=2$이므로

$f(8)=f(-2)$, $f(5)=f(-1)$

$$\therefore \frac{f(5)}{f(8)}=\frac{f(-1)}{f(-2)}$$

$$=\frac{-2\cdot(-1)e^{(-1)^2}}{-2\cdot(-2)e^{(-2)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}e^{1-4}$$

$$=\frac{1}{2e^{3}}$$

29 정답 151

해설 $a_n=ar^{n-1}$,

$b_n=bs^{n-1}$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $r\neq 0$, $s\neq 0$)이라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로

$-1<r<1$, $-1<s<1$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{ab}{1-rs}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b}{1-s}$이므로

$\frac{ab}{1-rs} = \frac{a}{1-r}\cdot\frac{b}{1-s}$, $1-rs=(1-r)(1-s)$

$r+s=2rs$ $\cdots$ ㉠

(i) $r>0$인 경우

$a_1>0$이면 $a_3>0$, $a_4>0$이므로

$$13\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}| = 13\cdot\frac{a_3}{1-r^3}$$

$$40\sum_{n=1}^{\infty}|a_{4n}| = 40\cdot\frac{a_4}{1-r^4}$$

$$\frac{13a_3}{1-r^3}=\frac{40a_4}{1-r^4},\ \frac{13}{1-r^3}=\frac{40r}{1-r^4}$$

$27r^4-40r+13=0$

$(r-1)(3r-1)(9r^2+12r+13)=0$

이때 $r=\frac{1}{3}$이므로 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}+s=\frac{2}{3}s$, 즉 $s=-1$

이는 $-1<s<1$에 모순이다.

$a_1<0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

(ii) $r<0$인 경우

$a_1>0$이면 $a_3>0$, $a_4<0$이고 수열 $\{|a_3|\}$의 공비는 $-r^3$, 수열 $\{|a_4|\}$의 공비는 r^4이므로

$$13\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}| = 13\cdot\frac{a_3}{1+r^3}$$

$$40\sum_{n=1}^{\infty}|a_{4n}| = 40\cdot\frac{-a_4}{1-r^4}$$

$$\frac{13a_3}{1+r^3}=-\frac{40a_4}{1-r^4},\ \frac{13}{1+r^3}=-\frac{40r}{1-r^4}$$

$27r^4+40r+13=0$

$(r+1)(3r+1)(9r^2-12r+13)=0$

따라서 $r=-\frac{1}{3}$이므로 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{3}+s=-\frac{2}{3}s$

$\therefore\ s=\frac{1}{5}$

$a_1<0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 $b_n=b\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}+b_{3n+2}}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}+b\left(\frac{1}{5}\right)^{3n+1}}{b\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}\right\}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{625}}{1-\frac{1}{25}}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{600}=\frac{151}{600}$$

따라서 $S=\frac{151}{600}$이므로

$600S=600\cdot\frac{151}{600}=151$

30 정답 45

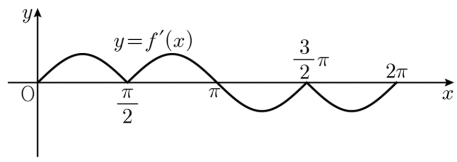
해설 $f'(x)=|\cos x|\sin x$

$$=\begin{cases}\cos x\sin x & (\cos x\ge 0)\\ -\cos x\sin x & (\cos x<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2x & (\cos x\ge 0)\\ -\frac{1}{2}\sin 2x & (\cos x<0)\end{cases}$$

이때 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 $0\le x\le 2\pi$에서만 그려보면 다음과 같다.



또한, $h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$에서

$h'(x)=f(x)-g(x)$이므로

$h'(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$를 만족시키면서 그 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 $y=\sin 2x$의 대칭성을 이용하여 양수 a의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로

$a_5=\frac{3}{2}\pi$, $a_3=\frac{3}{4}\pi$

$$\therefore\ \frac{60}{\pi}(a_5-a_3)=\frac{60}{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$=45$$