

미적분 2024 수능 미적분 전체 문제 변형 (2023 시행)

고3 23년 11월

2024.08.23 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을
입력해 보세요!



| 지수법칙(2) : 지수가 유리수일 때 | 정답률 86%

01

[2022년 3월 고3 1번/2점]

$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

| 미분계수를 이용하여 극한값 구하기 | 정답률 75%

02

함수 $f(x) = x^2 - 3$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{h}$ 의 값을 구하시오.

| 여러 가지 각의 삼각함수 | 정답률 77%

03 [2023년 11월 고3 3번 변형]
 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos(-\theta) = -\frac{1}{4}$ 일 때,
 $\tan\theta$ 의 값은?

- ① -4
- ② $-\sqrt{15}$
- ③ $-2\sqrt{3}$
- ④ $2\sqrt{3}$
- ⑤ $\sqrt{15}$

| 함수가 연속일 조건(1) : 구간별로 주어진 함수가 연속일 조건 | 정답률 90%

04 [2022년 7월 고3 5번/3점]
함수 $f(x) = \begin{cases} x-1 & (x < 2) \\ x^2-ax+3 & (x \geq 2) \end{cases}$ 가 실수 전체의
집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : $f'(x)$ 로부터 $f(x)$ 구하기 | 정답률 92%

05

[2020년 11월 고3 문과 23번/3점]

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$ 이고 $f(0) = 4$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.

| 부분의 합이 주어진 등비수열의 합 | 정답률 75%

06

[2023년 11월 고3 6번 변형]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하자. $S_5 - S_3 = 4a_5$, $a_6 = \frac{4}{3}$ 일 때, $a_1 + a_2$ 의 값은?

- ① 432
- ② 430
- ③ 428
- ④ 426
- ⑤ 424

| 함수의 극대 · 극소 (함수의 극값, 극댓값, 극솟값 구하기) | 정답률 88%

07

[2018년 11월 고2 문과 12번/3점]

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ 이
 $x = \alpha$ 에서 극댓값 M 을 가질 때, $\alpha + M$ 의 값은?

- ① 4 ② 6 ③ 8
- ④ 10 ⑤ 12

| 우함수 · 기함수의 정적분(1) : 피적분함수가 주어진 경우 | 정답률 81%

08

[2023년 11월 고3 8번 변형]

삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여
 $xf(x) + f(x) = x^4 + x$ 를 만족시킬 때, $\int_{-3}^3 f(x)dx$ 의
값은?

- ① -14 ② -16 ③ -18
- ④ -20 ⑤ -22

| 로그의 여러 가지 성질을 이용한 계산 | 정답률 74%

09 [2023년 11월 고3 9번 변형]
수직선 위의 두 점 $P(\log_3 2)$, $Q(\log_3 36)$ 에 대하여
선분 PQ를 $m : (1 - m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가 2일
때, 18^m 의 값은? (단, $0 < m < 1$)

- ① $\frac{7}{2}$
- ② 4
- ③ $\frac{9}{2}$
- ④ 5
- ⑤ $\frac{11}{2}$

| 움직인 거리(1) : 직선 운동에서의 위치와 움직인 거리 | 정답률 72%

10 [2023년 11월 고3 10번 변형]
시각 $t = 0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를
움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각
 $v_1(t) = 3t^2 - 6t + 4$, $v_2(t) = 12t - 20$ 이다.
시각 t 에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때,
함수 $f(t)$ 는 구간 $[0, a]$ 에서 증가하고, 구간 $[a, b]$ 에서
감소하고, 구간 $[b, \infty)$ 에서 증가한다. 시각 $t = a$ 에서
 $t = b$ 까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0 < a < b$)

- ① 16
- ② 32
- ③ 64
- ④ 128
- ⑤ 256

| 여러 가지 수열의 합(1) : 부분분수를 이용하는 경우 | 정답률 58%

11

[2023년 11월 고3 11번 변형]

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 = |a_7|, \sum_{k=1}^4 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{5} \text{ 일 때, } \sum_{k=1}^{10} a_k \text{의 값은?}$$

① 25

② 20

③ 15

④ 10

⑤ 5

| 두 곡선 사이의 넓이의 활용(2) : 넓이의 최솟값 | 정답률 55%

12

[2023년 11월 고3 12번 변형]

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$ 과 실수 t ($0 < t < 3$)에

대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -2(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases} \text{이다.}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의

넓이의 최댓값은?

① $\frac{20}{3}$

② $\frac{61}{9}$

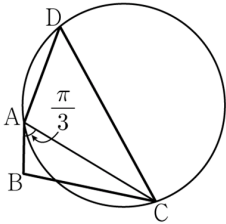
③ $\frac{62}{9}$

④ 7

⑤ $\frac{64}{9}$

| 외접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이 | 정답률 62%

13 [2023년 11월 고3 13번 변형]
다음 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$,
 $\overline{AD} \cdot \overline{CD}=32$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$ 인 사각형 ABCD가
있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1 , 삼각형 ACD의 넓이를
 S_2 라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를
 R 라 하자. $S_2=\frac{7}{3}S_1$ 일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ 의 값은?



- ① $\frac{511}{98}$
- ② $\frac{256}{49}$
- ③ $\frac{513}{98}$
- ④ $\frac{257}{49}$
- ⑤ $\frac{515}{98}$

| 방정식 f(x)=g(x)의 실근 | 정답률 33%

14 [2023년 11월 고3 14번 변형]
두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는
$$f(x)=\begin{cases} x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 & \left(x\leq\frac{5}{2}\right) \\ 4a(2x-5)(x-b)+19 & \left(x>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$
이다.
실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가
만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자.
$$\lim_{t\rightarrow k-} g(t) \cdot \lim_{t\rightarrow k+} g(t)-g(k)=6$$

을 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는
두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의
최댓값은?

- ① 51
- ② 52
- ③ 53
- ④ 54
- ⑤ 55

| 수열의 귀납적 정의 | **정답률 39%**

15

[2023년 11월 고3 15번 변형]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3^{a_n} & (a_n \text{ 이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_n & (a_n \text{ 이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases} \text{를}$$

만족시킬 때, $a_5 + a_6 = 4$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

① 390

② 392

③ 394

④ 396

⑤ 398

| 지수에 미지수를 포함하는 방정식(1) : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | **정답률 89%**

16

[2017년 4월 고3 이과 6번 변형]

방정식 $\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} = 2^{x-2}$ 을 만족시키는 실수 x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

| 곱의 미분법(1) : $y=f(x)g(x)$ 꼴 | 정답률 88%

17 함수 $f(x) = (2x^2 - 3x)(x^3 - x^2 + x - 1)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은?

- ① 41
- ② 42
- ③ 43
- ④ 44
- ⑤ 45

| Σ 의 성질 | 정답률 76%

18 [2023년 11월 고3 18번 변형]
두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^5 (2b_k - 3), \sum_{k=1}^5 (2a_k + b_k) = 20 \text{ 일 때,}$$

$$\sum_{k=1}^5 b_k \text{의 값을 구하시오.}$$

| 삼각함수가 포함된 부등식(2) : (치환하여) 이차 이상의 다항식이 되는 경우 | **정답률 51%**

19

[2023년 11월 고3 19번 변형]

함수 $f(x) = \sin \pi x$ 라 할 때, $0 < x < 4$ 에서

부등식 $f(1+x)f(1-x) > -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 모든

자연수 x 의 값의 합을 구하시오.

| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 | **정답률 49%**

20

[2023년 11월 고3 20번 변형]

$a > \sqrt{6}$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$f(x) = -2x^3 + ax^2 + 3x$ 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의

점 $O(0, 0)$ 에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중

O 가 아닌 점을 A 라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의

점 A 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. 점 A 가

선분 OB 를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{OA} \cdot \overline{AB}$ 의 값을 구하시오.

| 로그함수의 최대 · 최소 (2) : 최대 · 최소를 이용하여 미지수 구하기 | 정답률 50%

21

[2023년 11월 고3 21번 변형]

양수 a 에 대하여 $x \geq -1$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는
$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 12x & (-1 \leq x < 5) \\ a \log_2(x-4) & (x \geq 5) \end{cases}$$
이다. $t \geq 0$ 인 실수 t 에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 16이 되도록 하는 양수 a 의 최솟값을 구하시오.

| 함수의 그래프 그리기 | 정답률 34%

22

[2023년 11월 고3 22번 변형]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(\alpha)f(\alpha+2) < 0$ 을 만족시키는 정수 α 는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}, f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{6}$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.

| 로그함수의 극한(1) : $\lim_{x \rightarrow 0} \{x - \ln(1+x)\}/x$ 꼴의 극한 | 정답률 84%

23 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+8x)}$ 의 값을 구하시오.

| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 | 정답률 80%

24 [2023년 11월 고3 미적분 24번 변형]
매개변수 t ($t > 0$)으로 나타내어진

곡선 $x = \ln(3t^2 + 1)$, $y = \sin \pi t^2$ 에서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때,

$\frac{dy}{dx}$ 의 값은?

- ① $\frac{5\sqrt{2}}{24}\pi$
- ② $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$
- ③ $\frac{7\sqrt{2}}{24}\pi$
- ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$
- ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$

| 치환적분을 이용한 정적분(2) : 유리함수 | 정답률 58%

25

[2023년 11월 고3 미적분 25번 변형]

양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 있다. $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이고, $g'(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 양수 a 에 대하여

$$\int_2^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)} dx = 3\ln a - \ln(a+2) - \ln 2$$

이고 $f(2) = 4$ 일 때, $f(6)$ 의 값은?

① 46

② 48

③ 50

④ 52

⑤ 54

| 입체도형의 부피; 단면이 밑면과 수직인 경우(1) | 정답률 50%

26

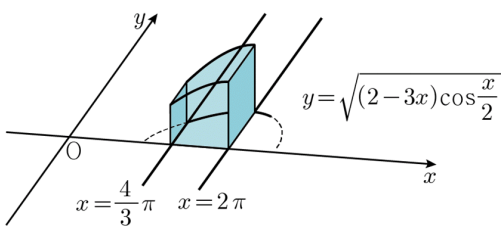
[2023년 11월 고3 미적분 26번 변형]

다음 그림과 같이

곡선 $y = \sqrt{(2-3x)\cos\frac{x}{2}}$ ($\frac{4}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$)와

x 축 및 두 직선 $x = \frac{4}{3}\pi, x = 2\pi$ 로 둘러싸인 부분을

밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $6 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\pi$

② $6 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\pi$

③ $12 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\pi$

④ $12 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\pi$

⑤ $18 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\pi$

| 접선의 방정식(4) : 곡선 밖의 점이 주어진 경우 | **정답률 59%**

27

[2023년 11월 고3 미적분 27번 변형]

실수 t 에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y = \frac{2}{e^x} - e^t$ 에

접하는 직선의 기울기를 $f(t)$ 라 하자. $f(a) = -2\sqrt{e}$ 를 만족시키는 상수 a 에 대하여 $f'(a)$ 의 값은?

- ① $\frac{4}{3}\sqrt{e}$ ② $\frac{5}{3}\sqrt{e}$ ③ $2\sqrt{e}$
- ④ $\frac{7}{3}\sqrt{e}$ ⑤ $\frac{8}{3}\sqrt{e}$

| 정적분(4) : 지수함수 | **정답률 36%**

28

[2023년 11월 고3 미적분 28번 변형]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이고, $x < 0$ 일 때 $f(x) = -2xe^{x^2}$ 이다. 모든 양수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $g(t)$, $h(t)$ 는 모든 양수 t 에 대하여 $3g(t) + h(t) = k$ (k 는 상수)를 만족시킨다. $\int_0^{11} f(x)dx = 3(e^9 - 1)$ 일 때, $\frac{f(5)}{f(8)}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2e^3}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ e
- ④ $2e^3$ ⑤ $4e^5$

| 등비급수의 응용(5) : 그 외 | 정답률 46%

29

[2023년 11월 고3 미적분 29번 변형]

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$13 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 40 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{4n}|$ 이 성립한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n} + b_{3n+2}}{b_n} = S$ 일 때, $600S$ 의 값을 구하시오.

| 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소 | 정답률 31%

30

[2023년 11월 고3 미적분 30번 변형]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = |\cos x| \sin x$ 이다.

양수 a 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$ 라 하자.

함수 $h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$ 가 $x = a$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$\frac{60}{\pi}(a_5 - a_3)$ 의 값을 구하시오.

미적분 2024 수능 미적분 전체 문제 변형 (2023 시행)

고3 23년 11월

2024.08.23 | 30문제 | 부산연제고등학교 이름 _____

QR을 스캔해 정답을
입력해 보세요!



01 정답 ⑤

해설 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$$\begin{aligned}(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} &= \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \\ &= 3^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2}} \\ &= 3^2 = 9\end{aligned}$$

02 정답 4

해설 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \{(2-h)^2 - 3\}}{h}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4 - h) = 4\end{aligned}$$

03 정답 ②

해설 $\cos(-\theta) = \cos\theta = -\frac{1}{4}$ 에서

$$\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\sqrt{15}$$

04 정답 ③

해설 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - ax + 3) = f(2)$$

$$1 = 7 - 2a$$

$$\therefore a = 3$$

05 정답 12

해설 부정적분을 계산할 수 있는가?

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 5 \text{에서}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 4x + 5) dx$$

$$= x^3 + 2x^2 + 5x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = 4 \text{이므로}$$

$$C = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 4 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 + 2 + 5 + 4 = 12$$

06 정답 ①

해설 $S_5 - S_3 = a_5 + a_4$ 이므로

$$a_4 + a_5 = 4a_5, \quad a_4 = 3a_5$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_6 = \frac{4}{3} \text{에서 } r \neq 0 \text{이고}$$

$$a_4 = 3a_5 \text{에서 } r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{3}$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \text{에서}$$

$$a_1 = a_6 \cdot \frac{1}{r^5} = \frac{4}{3} \cdot 3^5 = 324,$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 324 \cdot \frac{1}{3} = 108$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 108 + 324 = 432$$

07 정답 ②

해설 도함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

$$\therefore \alpha = 1, M = f(1) = 5$$

$$\text{따라서 } \alpha + M = 6$$

08 정답 ③

해설 $xf(x) + f(x) = x^4 + x$ 에서

$$(x+1)f(x) = x(x+1)(x^2 - x + 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 가 삼차함수이고 $\textcircled{1}$ 이 x 에 대한 항등식이므로

$$f(x) = x(x^2 - x + 1)$$

$$\therefore \int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^3 x(x^2 - x + 1) dx$$

$$= \int_{-3}^3 (x^3 - x^2 + x) dx$$

$$= 2 \int_0^3 (-x^2) dx$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3$$

$$= -18$$

09 정답 ③

해설 수직선 위의 두 점 $P(\log_3 2), Q(\log_3 36)$ 에 대하여
선분 PQ를 $m : (1-m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가
1이므로

$$\frac{m \cdot \log_3 36 + (1-m) \cdot \log_3 2}{m + (1-m)} = 2$$

$$m \cdot \log_3 36 + (1-m) \cdot \log_3 2 = 2$$

$$m(\log_3 36 - \log_3 2) = 2 - \log_3 2$$

$$m \cdot \log_3 \frac{36}{2} = \log_3 \frac{9}{2}$$

$$\therefore m = \frac{\log_3 \frac{9}{2}}{\log_3 18} = \log_{18} \frac{9}{2}$$

$$\therefore 18^m = 18^{\log_{18} \frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$$

10 정답 ②

해설 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t), x_2(t)$ 라
하면

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t (3t^2 - 6t + 4) dt$$

$$= t^3 - 3t^2 + 4t$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t (12t - 20) dt$$

$$= 6t^2 - 20t$$

$$\therefore f(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$$

$$= |t^3 - 9t^2 + 24t|$$

함수 $g(t)$ 를 $g(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ 라 하면

$$g'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4)$$

$g'(t) = 0$ 에서

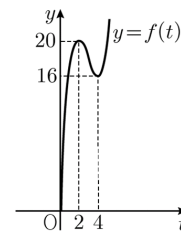
$$t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

$t \geq 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

t	0	...	2	...	4	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	0	↗	20	↘	16	↗

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \geq 0$ 이므로

$f(t) = g(t)$ 이고 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 다음 그림과
같다.



함수 $f(t)$ 는 구간 $[0, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $[2, 4]$ 에서
감소하고, 구간 $[4, \infty)$ 에서 증가한다.

즉, $a = 2, b = 4$ 이므로 시각 $t = 2$ 에서 $t = 4$ 까지

점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^4 |v_2(t)| dt = \int_2^4 |12t - 20| dt$$

$$= \left[6t^2 - 20t \right]_2^4$$

$$= 6 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4 - (6 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2)$$

$$= 32$$

11 정답 ④

해설 $a_5 = |a_7|$

$$a_5 = a_7 \text{ 또는 } -a_5 = a_7 \quad \dots \textcircled{1}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 0이 아니므로

$$a_5 \neq a_7 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$-a_5 = a_7, \text{ 즉 } a_5 + a_7 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

한편, $a_5 = |a_7|$ 에서 $a_5 \geq 0$ 이고, $a_5 + a_7 = 0$ 이므로 $a_7 < 0 < a_5$ 이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 음수이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d < 0$)이라 하면 ㉠에서

$$(a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 0$$

$$a_1 = -5d \quad \dots \text{㉡}$$

한편, $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{5}$ 에서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{a_{k+1} - a_k} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_5} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 4d} \right) \\ &= \frac{1}{d} \cdot \frac{4d}{a_1(a_1 + 4d)} \\ &= \frac{4}{a_1(a_1 + 4d)} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{4}{a_1(a_1 + 4d)} = \frac{1}{5}$ 이므로

$$a_1(a_1 + 4d) = 20 \quad \dots \text{㉢}$$

㉠을 ㉢에 대입하면

$$-5d \cdot (-d) = 20$$

$$d^2 = 4$$

이때 $d < 0$ 이므로

$$d = -2$$

따라서 $d = -2$ 를 ㉡에 대입하면

$$a_1 = -5 \cdot (-2) = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \frac{10\{2 \cdot 10 + 9 \cdot (-2)\}}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(t) &= f(t) + \frac{f(t) \cdot f'(t)}{2} \\ &= f(t) \left\{ 1 + \frac{f'(t)}{2} \right\} \end{aligned}$$

한편, $f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$ 이므로 $0 < t < 3$ 에서

$$f(t) > 0$$

이때 $1 + \frac{f'(t)}{2}$ 를 정리하면

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{f'(t)}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{6} \{(t-3)(t-6) + t(t-6) + t(t-3)\} \\ &= 1 + \frac{1}{6} \{(t^2 - 9t + 18) + (t^2 - 6t) + (t^2 - 3t)\} \\ &= 1 + \frac{1}{6} (3t^2 - 18t + 18) \\ &= 1 + \frac{1}{2} (t^2 - 6t + 6) \\ &= \frac{1}{2} (t^2 - 6t + 8) \\ &= \frac{1}{2} (t-2)(t-4) \end{aligned}$$

따라서 $0 < t < 3$ 에서 $S(t)$ 의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

x	(0)	...	2	...	(3)
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		↗	(극대)	↘	

따라서 $S(t)$ 는 $t = 2$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$\begin{aligned} S(2) &= \int_0^2 f(x) dx + \frac{\{f(2)\}^2}{4} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 x(x-3)(x-6) dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-4) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 (x^3 - 9x^2 + 18x) dx + \frac{16}{9} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} x^4 - 3x^3 + 9x^2 \right]_0^2 + \frac{16}{9} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 9 \cdot 4 \right) + \frac{16}{9} \\ &= \frac{64}{9} \end{aligned}$$

12 정답 ⑤

해설 함수 $g(x)$ 는 $x \geq t$ 일 때, 점 $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가 -2 인 직선이므로 이 직선은 x 축과 점 $\left(t + \frac{f(t)}{2}, 0\right)$ 에서 만난다.

따라서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{f(t)}{2} - t \right) \cdot f(t) \\ &= \int_0^t f(x) dx + \frac{\{f(t)\}^2}{4} \end{aligned}$$

이때 양변을 미분하면

13 정답 ②

해설 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$ ($a>0$)이라 하면
코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$(2\sqrt{7})^2 = 2^2 + a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$a^2 - 2a - 24 = 0, (a+4)(a-6) = 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = 6$

즉, $\overline{AC} = 6$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin(\angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

이때 $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = 32$ 이므로 삼각형 ACD의 넓이 S_2 는

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \sin(\angle ACD)$$

$$= 16\sin(\angle ADC)$$

이때 $S_2 = \frac{7}{3}S_1$ 이므로

$$16\sin(\angle ADC) = \frac{7}{3} \cdot 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin(\angle ADC) = \frac{7\sqrt{3}}{16}$$

따라서 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)} = 2R$$

$$\frac{6}{\frac{7\sqrt{3}}{16}} = 2R$$

따라서 $R = \frac{16\sqrt{3}}{7}$ 이므로

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{7}}{\frac{7\sqrt{3}}{16}} = \frac{256}{49}$$

14 정답 ②

해설 $x \leq \frac{5}{2}$ 일 때,

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$x \leq \frac{5}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\frac{11}{2}$	$\nearrow$	8

또한, a, b 가 자연수이므로

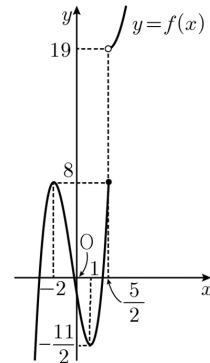
곡선 $y = 4a(2x-5)(x-b) + 19$ 는 점 $(\frac{5}{2}, 19)$ 와

점 $(b, 19)$ 를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(i) $b = 1$ 또는 $b = 2$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 $x > \frac{5}{2}$ 에서 증가하고,

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $-\frac{11}{2} < k < 8$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$$g(k) = \lim_{t \rightarrow k-} g(t) = \lim_{t \rightarrow k+} g(t) = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow k-} g(t) \cdot \lim_{t \rightarrow k+} g(t) - g(k) = 6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

을 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 아니다.

(ii) $b \geq 3$ 인 경우

곡선 $y = 4a(2x-5)(x-b) + 19$ 는

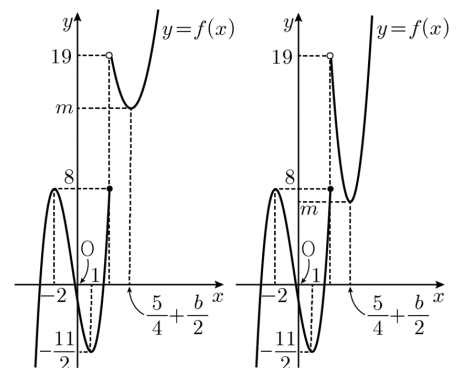
직선 $x = \frac{\frac{5}{2}+b}{2} = \frac{5}{4} + \frac{b}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{4} + \frac{b}{2}$ 에서 극솟값을 갖고

이 값을 m 이라 하면

(ii-①)

$m > -\frac{11}{2}$ 인 경우



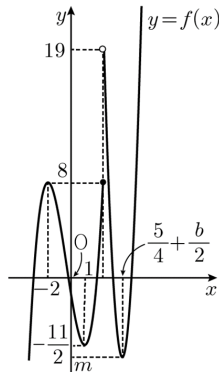
이때 m 과 8 중 크지 않은 값을 m_1 이라 하면

$-\frac{11}{2} < k < m_1$ 인 모든 실수 k 에 대하여 ①이

성립하므로 ㉠을 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 아니다.

(ii-②)

$$m < -\frac{11}{2} \text{인 경우}$$

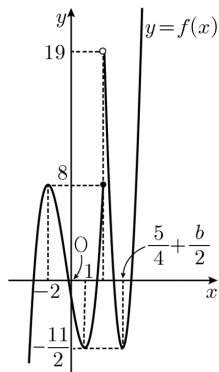


이때 $m < k < -\frac{11}{2}$ 인 모든 실수 k 에 대하여 ㉠이

성립하므로 ㉠을 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 아니다.

(ii-③)

$$m = -\frac{11}{2} \text{인 경우}$$



k 의 값에 따라 $g(k)$, $\lim_{t \rightarrow k^-} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow k^+} g(t)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim_{t \rightarrow k^-} g(t)$	$\lim_{t \rightarrow k^+} g(t)$
$k < -\frac{11}{2}$	1	1	1
$k = -\frac{11}{2}$	3	1	5
$-\frac{11}{2} < k < 8$	5	5	5
$k = 8$	4	5	2
$8 < k < 19$	2	2	2
$k = 19$	1	2	1
$k > 19$	1	1	1

즉, ㉠을 만족시키는 실수 k 의 값은 8뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $b \geq 3$, $m = -\frac{11}{2}$ 이다.

$$f\left(\frac{5}{4} + \frac{b}{2}\right) = -\frac{11}{2} \text{에서}$$

$$4a\left(-\frac{5}{2} + b\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{b}{2}\right) + 19 = -\frac{11}{2}$$

$$a(2b-5)^2 = 49$$

이때 $49 = 7^2$ 이므로 구하는 두 자연수 a , b 의

모든 순서쌍 (a, b) 는

$a = 1, 2b - 5 = 7$ 또는 $a = 49, 2b - 5 = 1$ 에서

$(1, 6), (49, 3)$ 이다.

따라서 $a + b$ 의 최댓값은

$$49 + 3 = 52$$

15 정답 ③

해설 a_n 이 3의 배수가 아닐 때 $a_{n+1} = 3^{a_n}$ 은 자연수이고

a_n 이 3의 배수일 때 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ 은 자연수이다.

$a_5 + a_6 = 4$ 에서

$a_5 = 1, a_6 = 3$ 또는 $a_5 = 3, a_6 = 1$ 이다.

(i) $a_5 = 1$ 일 때,

$a_5 = 1$ 이고 a_4 가 3의 배수가 아닌 경우 $a_5 = 3^{a_4}$ 에서

$$1 = 3^{a_4}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_4 의 값은 존재하지 않는다.

$a_5 = 1$ 이고 a_4 가 3의 배수인 경우 $a_5 = \frac{1}{3}a_4$ 에서

$$1 = \frac{1}{3}a_4, \text{ 즉 } a_4 = 3$$

이때 $a_4 = 3$ 이고 a_3 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_4 = 3^{a_3}$$

$$3 = 3^{a_3}, \text{ 즉 } a_3 = 1$$

이때 $a_3 = 1$ 이고 a_2 가 3의 배수가 아닌 경우

$$a_3 = 3^{a_2}$$

$$1 = 3^{a_2}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_2 의 값은 존재하지 않는다.

이때 $a_3 = 1$ 일 때 a_2 가 3의 배수인 경우

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2$$

$$1 = \frac{1}{3}a_2$$

$a_2 = 3$ 이고 a_1 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_2 = 3^{a_1}$$

$$3 = 3^{a_1}, \text{ 즉 } a_1 = 1$$

$a_2 = 3$ 이고 a_1 이 3의 배수인 경우 $a_2 = \frac{1}{3}a_1$ 에서

$$3 = \frac{1}{3}a_1, \text{ 즉 } a_1 = 9$$

$a_4 = 3$ 이고 a_3 이 3의 배수인 경우 $a_4 = \frac{1}{3}a_3$ 에서

$$3 = \frac{1}{3}a_3, \text{ 즉 } a_3 = 9$$

$a_3 = 9$ 이고 a_2 가 3의 배수가 아닌 경우

$$a_3 = 3^{a_2}$$

$$9 = 3^{a_2}, \text{ 즉 } a_2 = 2$$

이때 $a_2 = 2$ 일 때 a_1 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_2 = 3^{a_1} \text{에서}$$

$$2 = 3^{a_1}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1 의 값은 존재하지 않는다.

$$a_2 = 2 \text{ 일 때 } a_1 \text{ 이 3의 배수인 경우 } a_2 = \frac{1}{3} a_1 \text{에서}$$

$$2 = \frac{1}{3} a_1, \text{ 즉 } a_1 = 6$$

$$a_3 = 9 \text{이고 } a_2 \text{가 3의 배수인 경우 } a_3 = \frac{1}{3} a_2 \text{에서}$$

$$9 = \frac{1}{3} a_2, \text{ 즉 } a_2 = 27$$

$a_2 = 27$ 이고 a_1 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_2 = 3^{a_1} \text{에서}$$

$$27 = 3^{a_1}, \text{ 즉 } a_1 = 3$$

이때 a_1 이 3의 배수이므로 모순이다.

$$a_2 = 27 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수인 경우 } a_2 = \frac{1}{3} a_1 \text{에서}$$

$$27 = \frac{1}{3} a_1, \text{ 즉 } a_1 = 81$$

따라서 a_1 의 값은 1 또는 6 또는 9 또는 81이다.

(ii) $a_5 = 3$ 일 때,

(i)의 과정을 이용하면

$$a_2 = 1 \text{ 또는 } a_2 = 6 \text{ 또는 } a_2 = 9 \text{ 또는 } a_2 = 81$$

이때 $a_2 = 1$ 이고 a_1 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_2 = 3^{a_1} \text{에서}$$

$$1 = 3^{a_1}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1 의 값은 존재하지 않는다.

$$a_2 = 1 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수인 경우}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1 \text{에서 } 1 = \frac{1}{3} a_1, \text{ 즉 } a_1 = 3$$

$$a_2 = 6 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수가 아닌 경우}$$

$$a_2 = 3^{a_1} \text{에서}$$

$$6 = 3^{a_1}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1 의 값은 존재하지 않는다.

$$a_2 = 6 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수인 경우}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1 \text{에서 } 6 = \frac{1}{3} a_1, \text{ 즉 } a_1 = 18$$

$$a_2 = 9 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수가 아닌 경우}$$

$$a_2 = 3^{a_1} \text{에서}$$

$$9 = 3^{a_1}, \text{ 즉 } a_1 = 2$$

$$a_2 = 9 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수인 경우}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1 \text{에서}$$

$$9 = \frac{1}{3} a_1, \text{ 즉 } a_1 = 27$$

$$a_2 = 81 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수가 아닌 경우}$$

$$a_2 = 3^{a_1} \text{에서}$$

$$81 = 3^{a_1}, \text{ 즉 } a_1 = 4$$

$$a_2 = 81 \text{이고 } a_1 \text{ 이 3의 배수인 경우}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1 \text{에서}$$

$$81 = \frac{1}{3} a_1, \text{ 즉 } a_1 = 243$$

따라서 a_1 의 값은 2 또는 3 또는 4 또는 18 또는 27 또는 243이다.

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 값의 합은

$$(1 + 6 + 9 + 81) + (2 + 3 + 4 + 18 + 27 + 243) = 394$$

16 정답 ④

$$\text{해설 } (2^{-2})^{3-x} = 2^{x-2}$$

$$2^{-6+2x} = 2^{x-2}$$

$$-6 + 2x = x - 2$$

$$\therefore x = 4$$

17 정답 ③

$$\begin{aligned} \text{해설 } f'(x) &= (2x^2 - 3x)'(x^3 - x^2 + x - 1) \\ &\quad + (2x^2 - 3x)(x^3 - x^2 + x - 1)' \\ &= (4x - 3)(x^3 - x^2 + x - 1) \\ &\quad + (2x^2 - 3x)(3x^2 - 2x + 1) \\ &= 4x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 7x + 3 \\ &\quad + 6x^4 - 13x^3 + 8x^2 - 3x \\ &= 10x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 10x + 3 \\ \therefore f'(2) &= 160 - 160 + 60 - 20 + 3 = 43 \end{aligned}$$

18 정답 10

해설 $\sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^5 (2b_k - 3)$
 $= 2 \sum_{k=1}^5 b_k - 15 \quad \dots \textcircled{1}$

$\sum_{k=1}^5 (2a_k + b_k) = 20$ 에서
 $2 \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 20$
 $\sum_{k=1}^5 b_k = -2 \sum_{k=1}^5 a_k + 20 \quad \dots \textcircled{2}$

이때 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $\sum_{k=1}^5 b_k = -2 \left(2 \sum_{k=1}^5 b_k - 15 \right) + 20$
 $\sum_{k=1}^5 b_k = -4 \sum_{k=1}^5 b_k + 50$
 $5 \sum_{k=1}^5 b_k = 50$
 $\therefore \sum_{k=1}^5 b_k = 10$

19 정답 6

해설 $f(1+x) = \sin(\pi + \pi x) = -\sin \pi x$,
 $f(1-x) = \sin(\pi - \pi x) = \sin \pi x$ 이므로 주어진
부등식은
 $-\sin^2 \pi x > -\frac{1}{2}$, 즉 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \pi x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$

이때 $0 < x < 4$ 에서 $0 < \pi x < 4\pi$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $0 < \pi x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi < \pi x < \frac{5}{4}\pi$ 또는
 $\frac{7}{4}\pi < \pi x < \frac{9}{4}\pi$ 또는 $\frac{11}{4}\pi < \pi x < \frac{13}{4}\pi$ 또는
 $\frac{15}{4}\pi < \pi x < 4\pi$
즉, $0 < x < \frac{1}{4}$ 또는 $\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$ 또는 $\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$
또는 $\frac{11}{4} < x < \frac{13}{4}$ 또는 $\frac{15}{4} < x < 4$ 이므로 구하는
자연수 x 의 값은 1, 2, 3이다.
따라서 구하는 모든 자연수 x 의 값의 합은
 $1 + 2 + 3 = 6$

20 정답 50

해설 $f(x) = -2x^3 + ax^2 + 3x$ 에서
 $f'(x) = -6x^2 + 2ax + 3$
 $f'(0) = 3$
따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $O(0, 0)$ 에서의 접선의
방정식은 $y = 3x$ 이다.
이때 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 3x$ 가 만나는 점의 x 좌표는
 $f(x) = 3x$ 에서
 $-2x^3 + ax^2 + 3x = 3x$
 $x^2(2x - a) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{a}{2}$

이때 점 A의 x 좌표는 0이 아니므로 점 A의 x 좌표는
 $\frac{a}{2}$ 이다.

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a\right)$ 이고 점 A가 선분 OB를
지름으로 하는 원 위의 점이므로
 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$
따라서 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이고,
 $f'\left(\frac{a}{2}\right) = -6 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2a \cdot \frac{a}{2} + 3 = 3 - \frac{a^2}{2}$ 이므로
직선 AB의 기울기는 $-\frac{a^2}{2} + 3$ 이고
 $3 \cdot \left(-\frac{a^2}{2} + 3\right) = -1$ 에서
 $a^2 = \frac{20}{3}$
 $\therefore a = \frac{2\sqrt{15}}{3} (\because a > \sqrt{6})$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{15}\right)$ 이므로
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은
 $y = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\sqrt{15}}{3}\right) + \sqrt{15} \quad \dots \textcircled{1}$

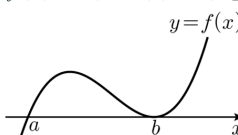
$\textcircled{1}$ 에 $y = 0$ 을 대입하면
 $0 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\sqrt{15}}{3}\right) + \sqrt{15}$
 $\therefore x = \frac{10\sqrt{15}}{3}$

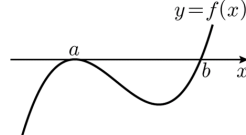
따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{10\sqrt{15}}{3}, 0\right)$ 이므로
 $\overline{OA} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 + (\sqrt{15})^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$,
 $\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{15}}{3} - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 + (0 - \sqrt{15})^2} = 5\sqrt{6}$
 $\therefore \overline{OA} \cdot \overline{AB} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \cdot 5\sqrt{6} = 50$

21 정답 16

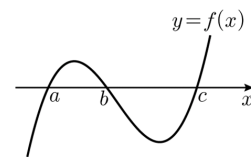
해설 $-1 \leq x < 5$ 에서
 $f(x) = -2x^2 + 12x$
 $= -2(x-3)^2 + 18$
 따라서 $t = 0$ 일 때, 구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는
 $x = 2$ 에서 최댓값 $f(2) = -2 \cdot (-1)^2 + 18 = 16$ 을
 가지므로
 $g(0) = 16$
 한편, 함수 $y = -2x^2 + 12x$ 는 직선 $x = 3$ 에 대하여
 대칭이고 $f(4) = 16$, $f(5) = 0$ 이므로 $1 \leq t \leq 3$ 일 때,
 $g(t) \geq 16$
 또, 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $g(t)$ 가 최솟값을 16으로 갖기
 위해서는 $t = 4$ 일 때, 구간 $[4, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의
 최댓값이 16 이상이어야 하므로
 $f(6) \geq 16$
 따라서 $x \geq 6$ 에서 $f(x) = a \log_2(x-4)$ 이므로
 $a \log_2(6-4) \geq 16$
 $\therefore a \geq 16$
 따라서 양수 a 의 최솟값은 16이다.

22 정답 114

해설 주어진 조건에서 함수 $f(x)$ 가 모든 정수 k 에 대하여
 $f(\alpha)f(\alpha+2) \geq 0$ 을 만족시켜야 한다. ... ㉠
 이때 함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은
 반드시 실근을 갖는다.
 (i) 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근의 개수가 1인 경우
 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근을 a 라 할 때, a 보다 작은
 정수 중 최댓값을 m 이라 하면
 $f(m) < 0 < f(m+2)$ 이므로
 $f(m)f(m+2) < 0$ 이 되어 ㉠을 만족시키지
 않는다.
 (ii) 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인
 경우
 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근을 a, b ($a < b$)라 할 때,
 양수 k 에 대하여
 $f(x) = k(x-a)(x-b)^2$ 또는
 $f(x) = k(x-a)^2(x-b)$
 (ii-①)
 $f(x) = k(x-a)(x-b)^2$ 일 때

 a 보다 작은 정수 중 최댓값을 m 이라 하면
 $f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0,$
 $f(m+2) \geq 0$
 이때 ㉠을 만족시키려면
 $f(m-1)f(m+1) \geq 0,$
 $f(m)f(m+2) \geq 0$ 이어야 하므로
 $f(m+1) = f(m+2) = 0$ 이어야 한다.

따라서 $a = m+1, b = m+2$ 이다.
 이때 $f'(\frac{1}{3}) < 0$ 이므로 $m+1 < \frac{1}{3} < m+2$ 이고
 정수 m 의 값은 -1 이다. ... ㉡
 $\therefore f(x) = kx(x-1)^2$
 그러나 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서
 $f'(-\frac{1}{3}) > 0$ 이므로 $f'(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}$ 을
 만족시키지 않는다.
 (ii-②)
 $f(x) = k(x-a)^2(x-b)$ 일 때


만약, $a < n < b$ 인 정수 n 이 존재한다면 그 중 가장
 큰 값을 n_1 이라 할 때,
 $f(n_1) < 0 < f(n_1+2)$ 이므로
 $f(n_1)f(n_1+2) < 0$ 이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.
 즉, $a < n < b$ 인 정수 n 은 존재하지 않는다. ... ㉢
 따라서 a 보다 작은 정수 중 최댓값을 m 이라 하면
 $f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0,$
 $f(m+2) \geq 0$
 이때 ㉡과 마찬가지로 $a = m+1, b = m+2,$
 정수 m 의 값은 -1 이다.
 $\therefore f(x) = kx^2(x-1)$
 그러나 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서
 $f'(-\frac{1}{3}) > 0$ 이므로 $f'(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}$ 을
 만족시키지 않는다.
 (iii) 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3인
 경우
 $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$ ($a < b < c$)라
 하면



이때 ㉡과 마찬가지로 $b < n < c$ 인 정수 n 은
 존재하지 않는다.
 따라서 a 보다 작은 정수 중 최댓값을 m 이라 하면
 $f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0,$
 $f(m+2) \geq 0$
 이때 ㉡과 마찬가지로 $b = m+1, c = m+2,$
 정수 m 의 값은 -1 이다.
 따라서
 $f(x) = k(x-a) \cdot x \cdot (x-1)$
 $= k(x-a)(x^2-x)$
 $f'(x) = k(x^2-x) + k(x-a)(2x-1)$
 이므로
 $f'(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{9}k + k \cdot (\frac{1}{3}-a) \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{7}{6}$
 $f'(-\frac{1}{3}) = \frac{4}{9}k + k \cdot (-\frac{1}{3}-a) \cdot (-\frac{5}{3}) = -\frac{1}{2}$

$$-\frac{2}{9}k - \frac{1}{9}k + \frac{1}{3}ak = -\frac{7}{6},$$

$$\frac{4}{9}k + \frac{5}{9}k + \frac{5}{3}ak = -\frac{1}{2}$$

두 식을 연립하여 정리하면

$$k = 2, a = -\frac{3}{4}$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = 2x\left(x + \frac{3}{4}\right)(x-1)$$

$$\therefore f(4) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{19}{4} \cdot 3 = 114$$

23 정답 1/4

해설

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+8x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{8x}{\ln(1+8x)} \cdot \frac{2}{8} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

24 정답 ③

해설

$$x = \ln(3t^2 + 1) \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6t}{3t^2 + 1}$$

$$y = \sin \pi t^2 \text{에서}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi t \cos \pi t^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2\pi t \cos \pi t^2}{\frac{6t}{3t^2 + 1}} \\ &= \frac{\pi(3t^2 + 1) \cos \pi t^2}{3} \end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\begin{aligned} \frac{\pi \left\{ 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right\} \cos \left(\pi \cdot \frac{1}{4} \right)}{3} &= \frac{\pi \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{24} \pi \end{aligned}$$

25 정답 ⑤

해설

함수 $g(x)$ 의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$ 의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 양수 x 에 대하여

$$f(x) > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

모든 양수 x 에 대하여 $g(f(x)) = x$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

$$\therefore \int_2^a \frac{1}{g'(f(x))f'(x)} dx$$

$$= \int_2^a \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$= \left[\ln |f(x)| \right]_2^a$$

$$= \ln f(a) - \ln f(2)$$

$$= \ln f(a) - \ln 4$$

$$= \ln f(a) - 2\ln 2$$

따라서 $\ln f(a) - 2\ln 2 = 3\ln a - \ln(a+2) - \ln 2$ 에서

$$\ln f(a) = 3\ln a - \ln(a+2) + \ln 2$$

$$= \ln a^3 - \ln(a+2) + \ln 2$$

$$= \ln \frac{2a^3}{a+2}$$

$$\text{즉, } f(a) = \frac{2a^3}{a+2} \text{이므로}$$

$$f(6) = \frac{2 \cdot 6^3}{6+2} = 54$$

26 정답 ①

해설

직선 $x = t \left(\frac{4}{3}\pi \leq t \leq 2\pi \right)$ 를 포함하고 x 축에 수직인

평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = (2-3t) \cos \frac{t}{2}$$

따라서 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$u(t) = 2-3t, v'(t) = \cos \frac{t}{2}$$

$$u'(t) = -3, v(t) = 2 \sin \frac{t}{2} \text{이므로}$$

$$V = \int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} (2-3t) \cos \frac{t}{2} dt$$

$$= \left[(2-3t) \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} + 6 \int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt$$

$$= 2 \left[(2-3t) \sin \frac{t}{2} \right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} + 6 \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}$$

$$= 2 \left\{ -(2-4\pi) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} + 6(2-1)$$

$$= -2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\pi + 6$$

27 정답 ③

해설 $y = 2e^{-x} - e^t$ 이므로

$$y' = -2e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(s, 2e^{-s} - e^t)$ 이라고 하면 접선의 방정식은

$$y = -2e^{-s}(x - s) + 2e^{-s} - e^t$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$2se^{-s} + 2e^{-s} - e^t = 0$$

$$e^t = 2(s+1)e^{-s} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

양변을 s 에 대하여 미분하면

$$e^t \frac{dt}{ds} = 2e^{-s} - 2(s+1)e^{-s} = -2se^{-s} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

또한, $f(t) = -2e^{-s}$ 이므로 양변을 s 에 대하여 미분하면

$$f'(t) \frac{dt}{ds} = 2e^{-s} \quad \dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢에서

$$\frac{e^t}{f'(t)} = -s, \text{ 즉 } f'(t) = -\frac{e^t}{s}$$

또한, $f(a) = -2e^{-s} = -2\sqrt{e} = -2e^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$s = -\frac{1}{2}$$

㉠에서 $e^a = e^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$f'(t) = -\frac{e^t}{s} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{e^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sqrt{e} \end{aligned}$$

28 정답 ①

해설 $x < 0$ 일 때 $f(x) = -2xe^{x^2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{x^2} - 2xe^{x^2} \cdot 2x \\ &= -2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} < 0 \end{aligned}$$

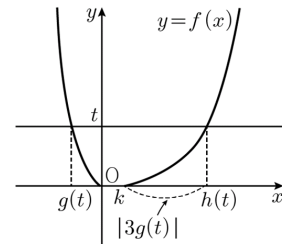
즉, $x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

또한, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이고

양수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 와 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

또한, 모든 양수 t 에 대하여 $3g(t) + h(t) = k$ 가

성립하므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $\int_0^{11} f(x)dx = 3(e^9 - 1)$ 에서 $h(t_1) = 11$ 이라

하면

$$\int_{g(t_1)}^0 (-2xe^{x^2})dx = e^9 - 1$$

$$\left[-e^{x^2}\right]_{g(t_1)}^0 = e^9 - 1$$

$$-1 + e^{\{g(t_1)\}^2} = e^9 - 1$$

$$g(t_1) = -3 \quad (\because g(t_1) < 0)$$

즉, $k + |3 \cdot (-3)| = 11$ 에서 $k = 2$ 이므로

$$f(8) = f(-2), f(5) = f(-1)$$

$$\therefore \frac{f(5)}{f(8)} = \frac{f(-1)}{f(-2)}$$

$$= \frac{-2 \cdot (-1)e^{(-1)^2}}{-2 \cdot (-2)e^{(-2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}e^{1-4}$$

$$= \frac{1}{2e^3}$$

29 정답 151

해설 $a_n = ar^{n-1}$,

$b_n = bs^{n-1}$ ($a \neq 0, b \neq 0, r \neq 0, s \neq 0$)이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 각각 수렴하므로}$$

$$-1 < r < 1, -1 < s < 1 \text{이다.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{ab}{1-rs}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b}{1-s} \text{이므로}$$

$$\frac{ab}{1-rs} = \frac{a}{1-r} \cdot \frac{b}{1-s}, 1-rs = (1-r)(1-s)$$

$$r+s=2rs \quad \dots \text{㉠}$$

(i) $r > 0$ 인 경우

$$a_1 > 0 \text{이면 } a_3 > 0, a_4 > 0 \text{ 이므로}$$

$$13 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 13 \cdot \frac{a_3}{1-r^3}$$

$$40 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{4n}| = 40 \cdot \frac{a_4}{1-r^4}$$

$$\frac{13a_3}{1-r^3} = \frac{40a_4}{1-r^4}, \frac{13}{1-r^3} = \frac{40r}{1-r^4}$$

$$27r^4 - 40r + 13 = 0$$

$$(r-1)(3r-1)(9r^2+12r+13)=0$$

$$\text{이때 } r = \frac{1}{3} \text{ 이므로 ㉠에 대입하면}$$

$$\frac{1}{3} + s = \frac{2}{3}s, \text{ 즉 } s = -1$$

이는 $-1 < s < 1$ 에 모순이다.

$a_1 < 0$ 인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은

결론을 얻을 수 있다.

(ii) $r < 0$ 인 경우

$$a_1 > 0 \text{이면 } a_3 > 0, a_4 < 0 \text{ 이고 수열 } \{|a_3|\}$$

공비는 $-r^3$, 수열 $\{|a_4|\}$ 의 공비는 r^4 이므로

$$13 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 13 \cdot \frac{a_3}{1+r^3}$$

$$40 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{4n}| = 40 \cdot \frac{-a_4}{1-r^4}$$

$$\frac{13a_3}{1+r^3} = -\frac{40a_4}{1-r^4}, \frac{13}{1+r^3} = -\frac{40r}{1-r^4}$$

$$27r^4 + 40r + 13 = 0$$

$$(r+1)(3r+1)(9r^2-12r+13)=0$$

$$\text{따라서 } r = -\frac{1}{3} \text{ 이므로 ㉠에 대입하면}$$

$$-\frac{1}{3} + s = -\frac{2}{3}s$$

$$\therefore s = \frac{1}{5}$$

$a_1 < 0$ 인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은

결론을 얻을 수 있다.

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } b_n = b \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n} + b_{3n+2}}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b \left(\frac{1}{5} \right)^{2n-1} + b \left(\frac{1}{5} \right)^{3n+1}}{b \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{5} \right)^n + \left(\frac{1}{5} \right)^{2n+2} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{\frac{1}{625}}{1 - \frac{1}{25}}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{600} = \frac{151}{600}$$

$$\text{따라서 } S = \frac{151}{600} \text{ 이므로}$$

$$600S = 600 \cdot \frac{151}{600} = 151$$

30 정답 45

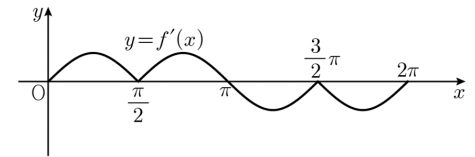
해설 $f'(x) = |\cos x| \sin x$

$$= \begin{cases} \cos x \sin x & (\cos x \geq 0) \\ -\cos x \sin x & (\cos x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x & (\cos x \geq 0) \\ -\frac{1}{2} \sin 2x & (\cos x < 0) \end{cases}$$

$$\text{이때 함수 } y = \sin 2x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ 이므로}$$

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형을 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서만 그려보면 다음과 같다.



$$\text{또한, } h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt \text{에서}$$

$$h'(x) = f(x) - g(x) \text{ 이므로}$$

$$h'(x) = 0, \text{ 즉 } f(x) = g(x) \text{를 만족시키면서 그 값의}$$

좌우에서 $h'(x)$ 의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 $y = \sin 2x$ 의 대칭성을 이용하여 양수 a 의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \text{ 이므로}$$

$$a_5 = \frac{3}{2}\pi, a_3 = \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore \frac{60}{\pi} (a_5 - a_3) = \frac{60}{\pi} \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi \right)$$

$$= 45$$