미적분 2024 수능 변형 어려운 4점(킬러 포함)

고3 23년 11월

2024.08.16 | 9문제 | 최성현 이름 _____

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

| 두 곡선 사이의 넓이의 활용(2) : 넓이의 최솟값 | 정답률 54%

01 [2023년 11월 고3 12번 변형]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$과 실수 t $(0<t<3)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -2(x-t)+f(t) & (x\geq t) \end{cases}$$

이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

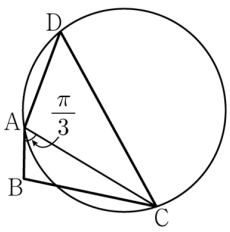
① $\frac{20}{3}$ ② $\frac{61}{9}$ ③ $\frac{62}{9}$

④ 7 ⑤ $\frac{64}{9}$

| 외접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이 | 정답률 62%

02 [2023년 11월 고3 13번 변형]

다음 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$, $\overline{AD}\cdot\overline{CD}=32$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자. $S_2=\frac{7}{3}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은?



① $\frac{511}{98}$ ② $\frac{256}{49}$ ③ $\frac{513}{98}$

④ $\frac{257}{49}$ ⑤ $\frac{515}{98}$

| 방정식 f(x)=g(x)의 실근 | 정답률 33%

03

[2023년 11월 고3 14번 변형]

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 & \left(x\le\frac{5}{2}\right) \\ 4a(2x-5)(x-b)+19 & \left(x>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

이다.

실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to k-} g(t)\cdot\lim_{t\to k+} g(t)-g(k)=6$$

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 39%

04

[2023년 11월 고3 15번 변형]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 3^{a_n} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_n & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를

만족시킬 때, $a_5+a_6=4$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 390 ② 392 ③ 394
④ 396 ⑤ 398

| 로그함수의 최대 · 최소 (2) : 최대 · 최소를 이용하여 미지수 구하기 | 정답률 51%

05

[2023년 11월 고3 21번 변형]

양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases} -2x^2+12x & (-1 \leq x < 5) \\ a\log_2(x-4) & (x \geq 5) \end{cases}$이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 16이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

| 함수의 그래프 그리기 | 정답률 33%

06

[2023년 11월 고3 22번 변형]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $f(\alpha)f(\alpha+2)<0$을 만족시키는 정수 α는
> 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{7}{6}$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

| 정적분(4) : 지수함수 | 정답률 36%

07

[2023년 11월 고3 미적분 28번 변형]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고, $x < 0$일 때 $f(x) = -2xe^{x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여 $3g(t) + h(t) = k$ (k는 상수)를 만족시킨다. $\int_0^{11} f(x)dx = 3(e^9 - 1)$일 때, $\frac{f(5)}{f(8)}$의 값은?

① $\frac{1}{2e^3}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ e

④ $2e^3$ ⑤ $4e^5$

| 등비급수의 응용(5) : 그 외 | 정답률 46%

08

[2023년 11월 고3 미적분 29번 변형]

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$,

$13\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 40\sum_{n=1}^{\infty} |a_{4n}|$이 성립한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n} + b_{3n+2}}{b_n} = S$일 때, $600S$의 값을 구하시오.

| 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소 | 정답률 31%

09 [2023년 11월 고3 미적분 30번 변형]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=|\cos x|\sin x$이다.
양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.
함수 $h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.
$\frac{60}{\pi}(a_5-a_3)$의 값을 구하시오.

미적분 2024 수능 변형 어려운 4점(킬러 포함)

고3 23년 11월

2024.08.16 | 9문제 | 최성현 이름 _____

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

빠른 정답

01 ⑤	02 ②	03 ②
04 ③	05 16	06 114
07 ①	08 151	09 45

미적분 2024 수능 변형 어려운 4점(킬러 포함)

고3 23년 11월

2024.08.16 | 9문제 | 최성현 이름 _____

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

01 정답 ⑤

해설 함수 $g(x)$는 $x \geq t$일 때, 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 -2인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $\left(t+\frac{f(t)}{2}, 0\right)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{f(t)}{2}-t\right)\cdot f(t)$$

$$=\int_0^t f(x)dx+\frac{\{f(t)\}^2}{4}$$

이때 양변을 미분하면

$$S'(t)=f(t)+\frac{f(t)\cdot f'(t)}{2}$$

$$=f(t)\left\{1+\frac{f'(t)}{2}\right\}$$

한편, $f(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$이므로 $0<t<3$에서

$f(t)>0$

이때 $1+\frac{f'(t)}{2}$를 정리하면

$$1+\frac{f'(t)}{2}$$

$$=1+\frac{1}{6}\{(t-3)(t-6)+t(t-6)+t(t-3)\}$$

$$=1+\frac{1}{6}\{(t^2-9t+18)+(t^2-6t)+(t^2-3t)\}$$

$$=1+\frac{1}{6}(3t^2-18t+18)$$

$$=1+\frac{1}{2}(t^2-6t+6)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2-6t+8)$$

$$=\frac{1}{2}(t-2)(t-4)$$

따라서 $0<t<3$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗	(극대)	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S(2)=\int_0^2 f(x)dx+\frac{\{f(2)\}^2}{4}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2 x(x-3)(x-6)dx$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-4)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2(x^3-9x^2+18x)dx+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^2+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 16-3\cdot 8+9\cdot 4\right)+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{64}{9}$$

02 정답 ②

해설 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a\ (a>0)$이라 하면
코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\angle BAC)$$

$$(2\sqrt{7})^2=2^2+a^2-2\cdot2\cdot a\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$a^2-2a-24=0,\ (a+4)(a-6)=0$$

이때 $a>0$이므로 $a=6$

즉, $\overline{AC}=6$이므로 삼각형 ABC의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin(\angle BAC)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot6\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=3\sqrt{3}$$

이때 $\overline{AD}\cdot\overline{CD}=32$이므로 삼각형 ACD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CD}\cdot\sin(\angle ACD)$$

$$=16\sin(\angle ADC)$$

이때 $S_2=\frac{7}{3}S_1$이므로

$$16\sin(\angle ADC)=\frac{7}{3}\cdot3\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sin(\angle ADC)=\frac{7\sqrt{3}}{16}$$

따라서 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$$

$$\frac{6}{\frac{7\sqrt{3}}{16}}=2R$$

따라서 $R=\frac{16\sqrt{3}}{7}$이므로

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{7}}{\frac{7\sqrt{3}}{16}}=\frac{256}{49}$$

03 정답 ②

해설 $x\le\frac{5}{2}$일 때,

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$에서

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x-1)(x+2)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

$x\le\frac{5}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	↗	8	↘	$-\frac{11}{2}$	↗	8

또한, a, b가 자연수이므로

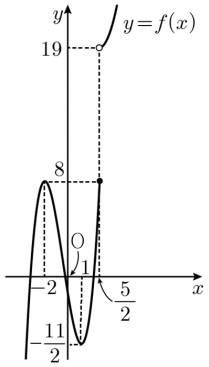
곡선 $y=4a(2x-5)(x-b)+19$는 점 $\left(\frac{5}{2},\ 19\right)$와

점 $(b,\ 19)$를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(ⅰ) $b=1$ 또는 $b=2$인 경우

함수 $f(x)$는 $x>\frac{5}{2}$에서 증가하고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $-\frac{11}{2}<k<8$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k)=\lim_{t\to k-}g(t)=\lim_{t\to k+}g(t)=3 \quad \cdots ㉠$$

이므로

$$\lim_{t\to k-}g(t)\cdot\lim_{t\to k+}g(t)-g(k)=6 \quad \cdots ㉡$$

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ) $b\ge3$인 경우

곡선 $y=4a(2x-5)(x-b)+19$는

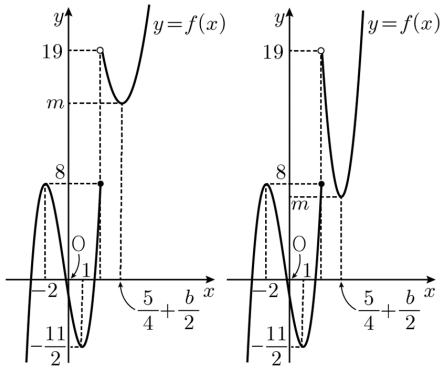
직선 $x=\frac{\frac{5}{2}+b}{2}=\frac{5}{4}+\frac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{4}+\frac{b}{2}$에서 극솟값을 갖고

이 값을 m이라 하면

(ⅱ−①)

$m>-\frac{11}{2}$인 경우



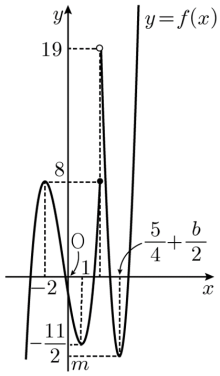
이때 m과 8 중 크지 않은 값을 m_1이라 하면

$-\frac{11}{2}<k<m_1$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이

성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ii-②)

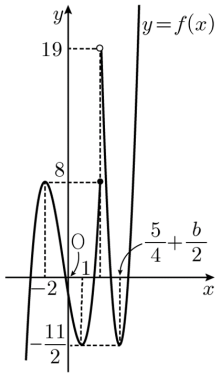
$m<-\frac{11}{2}$인 경우



이때 $m<k<-\frac{11}{2}$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ii-③)

$m=-\frac{11}{2}$인 경우



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim_{t\to k-} g(t)$, $\lim_{t\to k+} g(t)$의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim_{t\to k-} g(t)$	$\lim_{t\to k+} g(t)$
$k<-\frac{11}{2}$	1	1	1
$k=-\frac{11}{2}$	3	1	5
$-\frac{11}{2}<k<8$	5	5	5
$k=8$	4	5	2
$8<k<19$	2	2	2
$k=19$	1	2	1
$k>19$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k의 값은 8뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $b\ge 3$, $m=-\frac{11}{2}$이다.

$f\left(\frac{5}{4}+\frac{b}{2}\right)=-\frac{11}{2}$에서

$4a\left(-\frac{5}{2}+b\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{b}{2}\right)+19=-\frac{11}{2}$

$a(2b-5)^2=49$

이때 $49=7^2$이므로 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는

$a=1$, $2b-5=7$ 또는 $a=49$, $2b-5=1$에서

$(1, 6)$, $(49, 3)$이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은

$49+3=52$

04 정답 ③

해설 a_n이 3의 배수가 아닐 때 $a_{n+1}=3^{a_n}$은 자연수이고

a_n이 3의 배수일 때 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$은 자연수이다.

$a_5+a_6=4$에서

$a_5=1$, $a_6=3$ 또는 $a_5=3$, $a_6=1$이다.

(i) $a_5=1$일 때,

$a_5=1$이고 a_4가 3의 배수가 아닌 경우 $a_5=3^{a_4}$에서

$1=3^{a_4}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_4의 값은 존재하지 않는다.

$a_5=1$이고 a_4가 3의 배수인 경우 $a_5=\frac{1}{3}a_4$에서

$1=\frac{1}{3}a_4$, 즉 $a_4=3$

이때 $a_4=3$이고 a_3이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=3^{a_3}$에서

$3=3^{a_3}$, 즉 $a_3=1$

이때 $a_3=1$이고 a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=3^{a_2}$에서

$1=3^{a_2}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_2의 값은 존재하지 않는다.

이때 $a_3=1$일 때 a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\frac{1}{3}a_2$에서

$1=\frac{1}{3}a_2$

$a_2=3$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=3^{a_1}$에서

$3=3^{a_1}$, 즉 $a_1=1$

$a_2=3$이고 a_1이 3의 배수인 경우 $a_2=\frac{1}{3}a_1$에서

$3=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=9$

$a_4=3$이고 a_3이 3의 배수인 경우 $a_4=\frac{1}{3}a_3$에서

$3=\frac{1}{3}a_3$, 즉 $a_3=9$

$a_3=9$이고 a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=3^{a_2}$에서

$9=3^{a_2}$, 즉 $a_2=2$
이때 $a_2=2$일 때 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$2=3^{a_1}$
이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 존재하지 않는다.
$a_2=2$일 때 a_1이 3의 배수인 경우 $a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$2=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=6$
$a_3=9$이고 a_2가 3의 배수인 경우 $a_3=\frac{1}{3}a_2$에서
$9=\frac{1}{3}a_2$, 즉 $a_2=27$
$a_2=27$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$27=3^{a_1}$, 즉 $a_1=3$
이때 a_1이 3의 배수이므로 모순이다.
$a_2=27$이고 a_1이 3의 배수인 경우 $a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$27=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=81$
따라서 a_1의 값은 1 또는 6 또는 9 또는 81이다.

(ii) $a_5=3$일 때,
(i)의 과정을 이용하면
$a_2=1$ 또는 $a_2=6$ 또는 $a_2=9$ 또는 $a_2=81$
이때 $a_2=1$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$1=3^{a_1}$
이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 존재하지 않는다.
$a_2=1$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서 $1=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=3$
$a_2=6$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$6=3^{a_1}$
이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 존재하지 않는다.
$a_2=6$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서 $6=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=18$
$a_2=9$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$9=3^{a_1}$, 즉 $a_1=2$
$a_2=9$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$9=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=27$
$a_2=81$이고 a_1이 3의 배수가 아닌 경우
$a_2=3^{a_1}$에서
$81=3^{a_1}$, 즉 $a_1=4$
$a_2=81$이고 a_1이 3의 배수인 경우
$a_2=\frac{1}{3}a_1$에서
$81=\frac{1}{3}a_1$, 즉 $a_1=243$
따라서 a_1의 값은 2 또는 3 또는 4 또는 18 또는 27 또는 243이다.

(i), (ii)에서 모든 a_1의 값의 합은
$(1+6+9+81)+(2+3+4+18+27+243)$
$=394$

05 정답 16

해설 $-1\le x<5$에서
$f(x)=-2x^2+12x$
$=-2(x-3)^2+18$
따라서 $t=0$일 때, 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $f(2)=-2\cdot(-1)^2+18=16$을 가지므로
$g(0)=16$
한편, 함수 $y=-2x^2+12x$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고 $f(4)=16$, $f(5)=0$이므로 $1\le t\le 3$일 때, $g(t)\ge 16$
또, 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$가 최솟값을 16으로 갖기 위해서는 $t=4$일 때, 구간 $[4,\ 6]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 16 이상이어야 하므로
$f(6)\ge 16$
따라서 $x\ge 6$에서 $f(x)=a\log_2(x-4)$이므로
$a\log_2(6-4)\ge 16$
$\therefore\ a\ge 16$
따라서 양수 a의 최솟값은 16이다.

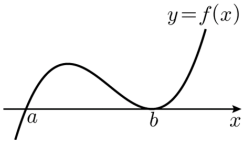
06 정답 114

해설 주어진 조건에서 함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여 $f(\alpha)f(\alpha+2)\ge 0$을 만족시켜야 한다. … ㉠
이때 함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 반드시 실근을 갖는다.
(i) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1인 경우
방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라 할 때, a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면
$f(m)<0<f(m+2)$이므로
$f(m)f(m+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.
(ii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우
방정식 $f(x)=0$의 실근을 a, b $(a<b)$라 할 때,
양수 k에 대하여
$f(x)=k(x-a)(x-b)^2$ 또는

$f(x)=k(x-a)^2(x-b)$

(ii-①)

$f(x)=k(x-a)(x-b)^2$일 때



a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0, f(m)<0, f(m+1)\geq 0,$

$f(m+2)\geq 0$

이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1)\geq 0,$

$f(m)f(m+2)\geq 0$이어야 하므로

$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

따라서 $a=m+1, b=m+2$이다.

이때 $f'\left(\frac{1}{3}\right)<0$이므로 $m+1<\frac{1}{3}<m+2$이고

정수 m의 값은 -1이다. … ㉡

$\therefore\ f(x)=kx(x-1)^2$

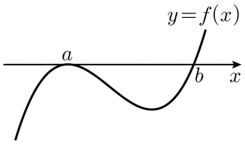
그러나 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f'\left(-\frac{1}{3}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}$을

만족시키지 않는다.

(ii-②)

$f(x)=k(x-a)^2(x-b)$일 때



만약, $a<n<b$인 정수 n이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을 n_1이라 할 때,

$f(n_1)<0<f(n_1+2)$이므로

$f(n_1)f(n_1+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

즉, $a<n<b$인 정수 n은 존재하지 않는다. … ㉢

따라서 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0, f(m)<0, f(m+1)\geq 0,$

$f(m+2)\geq 0$

이때 ㉡과 마찬가지로 $a=m+1, b=m+2,$

정수 m의 값은 -1이다.

$\therefore\ f(x)=kx^2(x-1)$

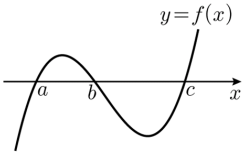
그러나 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f'\left(-\frac{1}{3}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}$을

만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

$f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$라 하면



이때 ㉢과 마찬가지로 $b<n<c$인 정수 n은

존재하지 않는다.

따라서 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0, f(m)<0, f(m+1)\geq 0,$

$f(m+2)\geq 0$

이때 ㉡과 마찬가지로 $b=m+1, c=m+2,$

정수 m의 값은 -1이다.

따라서

$f(x)=k(x-a)\cdot x\cdot(x-1)$

$=k(x-a)(x^2-x)$

$f'(x)=k(x^2-x)+k(x-a)(2x-1)$

이므로

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}k+k\cdot\left(\frac{1}{3}-a\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{7}{6}$

$f'\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}k+k\cdot\left(-\frac{1}{3}-a\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$-\frac{2}{9}k-\frac{1}{9}k+\frac{1}{3}ak=-\frac{7}{6},$

$\frac{4}{9}k+\frac{5}{9}k+\frac{5}{3}ak=-\frac{1}{2}$

두 식을 연립하여 정리하면

$k=2,\ a=-\frac{3}{4}$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=2x\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-1)$

$\therefore\ f(4)=2\cdot 4\cdot\frac{19}{4}\cdot 3=114$

07 정답 ①

해설 $x<0$일 때 $f(x)=-2xe^{x^2}$이므로

$f'(x)=-2e^{x^2}-2xe^{x^2}\cdot 2x$

$=-2e^{x^2}-4x^2e^{x^2}<0$

즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

또한, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고

양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$와 서로 다른

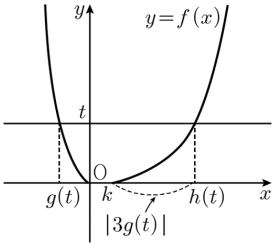
실근의 개수가 2이므로 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는

증가한다.

또한, 모든 양수 t에 대하여 $3g(t)+h(t)=k$가

성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과

같다.



이때 $\int_0^{11}f(x)dx=3(e^9-1)$에서 $h(t_1)=11$이라

하면

$\int_{g(t_1)}^{0}(-2xe^{x^2})dx=e^9-1$

$\left[-e^{x^2}\right]_{g(t_1)}^{0}=e^9-1$

$-1+e^{\{g(t_1)\}^2}=e^9-1$

$g(t_1)=-3$ ($\because g(t_1)<0$)

즉, $k+|3\cdot(-3)|=11$에서 $k=2$이므로

$f(8)=f(-2)$, $f(5)=f(-1)$

$\therefore \dfrac{f(5)}{f(8)}=\dfrac{f(-1)}{f(-2)}$

$=\dfrac{-2\cdot(-1)e^{(-1)^2}}{-2\cdot(-2)e^{(-2)^2}}$

$=\dfrac{1}{2}e^{1-4}$

$=\dfrac{1}{2e^3}$

08 정답 151

해설 $a_n=ar^{n-1}$,

$b_n=bs^{n-1}$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $r\neq 0$, $s\neq 0$)이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로

$-1<r<1$, $-1<s<1$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\dfrac{ab}{1-rs}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a}{1-r}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{b}{1-s}$이므로

$\dfrac{ab}{1-rs}=\dfrac{a}{1-r}\cdot\dfrac{b}{1-s}$, $1-rs=(1-r)(1-s)$

$r+s=2rs$ … ㉠

(ⅰ) $r>0$인 경우

$a_1>0$이면 $a_3>0$, $a_4>0$이므로

$13\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=13\cdot\dfrac{a_3}{1-r^3}$

$40\sum_{n=1}^{\infty}|a_{4n}|=40\cdot\dfrac{a_4}{1-r^4}$

$\dfrac{13a_3}{1-r^3}=\dfrac{40a_4}{1-r^4}$, $\dfrac{13}{1-r^3}=\dfrac{40r}{1-r^4}$

$27r^4-40r+13=0$

$(r-1)(3r-1)(9r^2+12r+13)=0$

이때 $r=\dfrac{1}{3}$이므로 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{3}+s=\dfrac{2}{3}s$, 즉 $s=-1$

이는 $-1<s<1$에 모순이다.

$a_1<0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은

결론을 얻을 수 있다.

(ⅱ) $r<0$인 경우

$a_1>0$이면 $a_3>0$, $a_4<0$이고 수열 $\{|a_3|\}$의

공비는 $-r^3$, 수열 $\{|a_4|\}$의 공비는 r^4이므로

$13\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=13\cdot\dfrac{a_3}{1+r^3}$

$40\sum_{n=1}^{\infty}|a_{4n}|=40\cdot\dfrac{-a_4}{1-r^4}$

$\dfrac{13a_3}{1+r^3}=-\dfrac{40a_4}{1-r^4}$, $\dfrac{13}{1+r^3}=-\dfrac{40r}{1-r^4}$

$27r^4+40r+13=0$

$(r+1)(3r+1)(9r^2-12r+13)=0$

따라서 $r=-\dfrac{1}{3}$이므로 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{1}{3}+s=-\dfrac{2}{3}s$

$\therefore s=\dfrac{1}{5}$

$a_1<0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은

결론을 얻을 수 있다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $b_n=b\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_{2n}+b_{3n+2}}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}+b\left(\frac{1}{5}\right)^{3n+1}}{b\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2n+2}\right\}$

$=\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}+\dfrac{\frac{1}{625}}{1-\frac{1}{25}}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{600} = \frac{151}{600}$$

따라서 $S = \frac{151}{600}$ 이므로

$600S = 600 \cdot \frac{151}{600} = 151$

09 정답 45

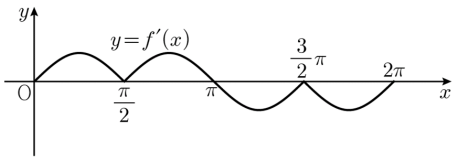
해설 $f'(x) = |\cos x| \sin x$

$$= \begin{cases} \cos x \sin x & (\cos x \geq 0) \\ -\cos x \sin x & (\cos x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x & (\cos x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}\sin 2x & (\cos x < 0) \end{cases}$$

이때 함수 $y = \sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$이므로

함수 $y = f'(x)$의 그래프의 개형을 $0 \leq x \leq 2\pi$에서만 그려보면 다음과 같다.



또한, $h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt$에서

$h'(x) = f(x) - g(x)$이므로

$h'(x) = 0$, 즉 $f(x) = g(x)$를 만족시키면서 그 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 $y = \sin 2x$의 대칭성을 이용하여 양수 a의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$이므로

$a_5 = \frac{3}{2}\pi, a_3 = \frac{3}{4}\pi$

$\therefore \frac{60}{\pi}(a_5 - a_3) = \frac{60}{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi\right)$

$= 45$

미적분 2024 수능 변형 어려운 4점(킬러 포함)

고3 23년 11월

2024.08.16 | 9문제 | 최성현 이름 _____

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

01	① ② ③ ④ ⑤
02	① ② ③ ④ ⑤
03	① ② ③ ④ ⑤
04	① ② ③ ④ ⑤
05	
06	
07	① ② ③ ④ ⑤
08	
09	